Alfred Landé

Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica

EF
ESTRUCTURA Y FUNCION
EDITORIAL TECNOS - MADRID

NUEVOS FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CUANTICA

Deducción de la teoría cuántica a partir de fundamentos no cuánticos y repudio del concepto «dualismo» en la Física y en la Filosofía.

Resulta insatisfactorio que algunos fenómenos de la Física se justifiquen bajo el supuesto de que los haces de electrones, etc., están compuestos por partículas discretas y que para justificar otros, se admita que poseen un carácter puramente ondulatorio.

El profesor Landé cree que este dualismo es innecesario, no sólo por razones metodológicas, sino también desde el punto de vista de la Física.

Utilizando la regla cuántica para intercambio del impulso lineal, establecida por W. Duane en 1923, el profesor Landé consigue explicar mediante una teoría corpuscular unitaria de la materia, fenómenos de tipo ondulatorio como la difracción, coherencia, etc.

Estudia además un problema fundamental: el del origen de las propias leyes cuánticas. Afirma que son consecuencia natural de los mismos postulados generales de simetría e invariancia ya conocidos de la mecánica determinista, una vez aceptado el carácter probabilístico general de los datos microfísicos.

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

Núm. 1. *Quentin Gibson.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION SOCIAL.—(2.ª edic.)
" 2. *M. F. Ashley Montagu.*—LA DIRECCION DEL DESARROLLO HUMANO
" 3. *Gustav Bergmann.*—FILOSOFIA DE LA CIENCIA
" 4. *Christian Bay.*—LA ESTRUCTURA DE LA LIBERTAD
" 5. *Ernest Nagel.*—LA LOGICA SIN METAFISICA
" 6. *David Hilbert y Wilhelm Ackermann.*—ELEMENTOS DE LOGICA TEORICA
" 7. *Vernon Van Dike.*—CIENCIA POLITICA: UN ANALISIS FILOSOFICO
" 8. *Karl R. Popper.*—LA LOGICA DE LA INVESTIGACION CIENTIFICA
" 9. *R. M. Martin.*—VERDAD Y DENOTACION
" 10. *Ernest Gellner.*—PALABRAS Y COSAS
" 11. *C. D. Broad.*—EL PENSAMIENTO CIENTIFICO
" 12. *John Hospers.*—LA CONDUCTA HUMANA
" 13. *Arthur Pap.*—TEORIA ANALITICA DEL CONOCIMIENTO
" 14. *T. C. Schelling.*—LA ESTRATEGIA DEL CONFLICTO
" 15. *Richard B. Braithwaite.*—LA EXPLICACION CIENTIFICA
" 16. *Milic Capek.*—EL IMPACTO FILOSOFICO DE LA FISICA CONTEMPORANEA
" 17. *Ros Ashby.*—PROYECTO PARA UN CEREBRO
" 18. *Hans Reichenbach.*—LA MODERNA FILOSOFIA DE LA CIENCIA
" 19. *Polya.*—MATEMATICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE
" 20. *Shackle.*—DECISION, ORDEN Y TIEMPO
" 21. *Armstrong.*—LA PERCEPCION Y EL MUNDO FISICO
" 22. *Nagel.*—RAZON SOBERANA
" 23. *Max Black.*—MODELOS Y METAFORAS
" 24. *Curry & Feys.*—LOGICA COMBINATORIA
" 25. *Wittgenstein.*—CUADERNOS AZUL Y MARRON
" 26. *Edel,* A.—EL METODO EN LA TEORIA ETICA.

NUEVOS FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CUANTICA

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Alfred Lande

NUEVOS FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CUANTICA

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
NEW FOUNDATIONS OF QUANTUM MECHANICS
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción de
VICTOR SANCHEZ DE ZAVALA

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1968
O'Donnell, 27.—Tel. 2262923.—Madrid (9)
Depósito legal: M. 20.808-1968

Printed in Spain. Impreso en España por Rivadeneyra, S. A. — Madrid.

INDICE GENERAL

PRÓLOGO ... 11

CAPÍTULO I. *Dualismo frente a mecánica cuántica* ... 13

1. Descripción, interpretación y explicación ... 13
2. La difracción a través de cristales ... 15
3. Mecánica de la difracción sin ondas ... 16
4. El experimento de las dos ranuras ... 20
5. La coherencia ... 22
6. La reflexión en una pared ... 24
7. Discurso del método ... 26

Resumen ... 30

CAPÍTULO II. *Causalidad y azar* ... 33

8. El determinismo laplaciano y la causalidad kantiana ... 33
9. La causalidad como predecibilidad ... 36
10. El prodigio de la cooperación estadística ... 38
11. La semejanza entre los juegos de azar ordinarios y cuánticos ... 41
12. El desorden molecular ... 43

Resumen ... 45

CAPÍTULO III. *La continuidad y los saltos cuánticos* ... 47

13. Las leyes estadísticas y el principio de continuidad ... 47
14. La separación de los estados atómicos ... 49
15. Reproducibilidad y saltos cuánticos ... 51

Resumen ... 55

CAPÍTULO IV. *Las probabilidades de transición* ... 57

16. La simetría bilateral ... 57
17. Estados y observables ... 61
18. La medición ... 64

Resumen ... 65

CAPÍTULO V. *El trasfondo termodinámico* 67

19. La continuidad frente a la equipartición de la energía 67
20. La continuidad de la energía frente a la paradoja de Gibbs ... 68
21. La entropía de los gases diluidos 70
22. Los aumentos de entropía debidos a los ensayos 74
23. Entropía e información 75
24. La entropía y la dirección del tiempo 78
Resumen 80

CAPÍTULO VI. *La interferencia de probabilidades* 81

25. La métrica de las estructuras geométricas 81
26. La métrica de las amplitudes probabilísticas 84
27. La métrica de las probabilidades 88
28. Partículas idénticas y teorema de Nernst 92
Resumen 95

CAPÍTULO VII. *El origen de las reglas cuánticas* 97

29. Definición de la conjugación dinámica 97
30. El origen de la función de onda 100
31. La periodicidad en una dimensión 102
32. La periodicidad en tres dimensiones 103
33. La periodicidad temporal 105
Resumen 106

CAPÍTULO VIII. *Hechos y ficciones de los cuantos* 109

34. Observaciones sobre el método 109
35. Dualidad y doblez del pensamiento 111
36. El neodualismo y los fotones 116
37. Incertidumbre frente a indeterminación 119
38. La reconstrucción de los datos impredecibles 124
39. La mística de la contracción del paquete de ondas 127
40. La interpretación subjetiva 130
41. La medición 132
42. Siete significados de ψ 137
43. La teoría subcuántica de Bohm 139
44. La complementaridad universal de Bohr 141
45. Un nuevo enfoque de la enseñanza de la mecánica cuántica ... 144
Resumen 148

APÉNDICES

1. *La interferencia de probabilidades* 151
2. *El formalismo tensorial* 155
3. *La función de onda* 157
4. *El espectro másico* 159

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 161

INDICE ALFABÉTICO 165

PROLOGO

La presente obra constituye una versión muy ampliada y afianzada de los libros del autor Foundations of Quantum Theory, a Study in Continuity and Symmetry *(Yale University Press, 1955) y* From Dualism to Unity in Quantum Physics *(Cambridge University Press, 1960); y lo que se propone es resolver el problema al que una generación anterior llamó «el enigma cuántico», esto es, la tarea de extraer las asombrosas leyes de la mecánica cuántica de una base no cuantista sin asumir supuestos* ad hoc. *Ahora bien, al hablar de no cuantista no se quiere decir que se trate del determinismo clásico ordinario, sino que, por el contrario, el punto de partida es probabilístico desde el comienzo mismo: valiéndose de idénticos postulados generales que los utilizados en la mecánica determinista para regular también la estructura de una teoría probabilitaria, se llega a la «nueva» mecánica cuántica asentada en 1926 tras más de dos decenios de tentativas y errores. Con lo que se resuelve el «enigma cuántico» por los métodos de la física teórica.*

Sin embargo, las consideraciones metodológicas, por sí solas, rara vez mueven a los científicos, inclinados sobre la investigación y la fructificación de nuevos territorios, a revisar el modo de enfoque que hayan adoptado. Mas la innovación que aporta el presente libro reside en señalar que los raciocinios puramente físicos *que han llevado a la doctrina dualista usual (según la cual la difracción y otros fenómenos de aspecto ondulatorio de la materia nos obligan a aceptar dos imágenes contradictorias, juntamente con una refinada interpretación subjetivista de los acontecimientos atómicos, en lugar de una realidad unitaria) contienen graves errores: el carácter erróneo de esta física consiste en pasar por alto un elemento muy importante de la mecánica cuántica de partículas, a saber, la regla de cuantización del intercambio de momento lineal [o impulso* (T.)] *(tercera regla cuántica de Duane, 1923), que presenta una analogía perfecta con las reglas cuánticas referentes a la energía (Planck) y al momento angular (Sommerfeld-Wilson). Y, en realidad, la tercera regla cuántica proporciona una explicación completa de todos los fenómenos de aspecto ondulatorio de la materia, entre ellos la difracción y la coherencia, sin que sea preciso utilizar la fantástica hipótesis de que las partículas se transformen ocasionalmente en ondas, o bien —cosa que equivale a lo anterior— que se «manifiesten» como si lo hubieran hecho. Los físicos, en sus extensos debates sobre la interpretación de la teoría cuántica, cometen una grave falta por omisión al no mencionar nunca la tercera regla de la mecánica cuántica, el «eslabón per-*

dido» entre las apariencias ondulatorias y la realidad corpuscular; y ello conlleva una desesperada revaloración del anticuado dogma de la dualidad, que, sin embargo, se repite una y otra vez. Vamos a intentar extraer esta espina clavada en el flanco tanto de la física como de la filosofía natural.

Por consiguiente, en el presente estudio recurrimos a dos tonos distintos. Primeramente, uno, mayor, que consiste en deducir las leyes cuánticas de unos postulados generales, no cuantistas, de simetría e invariancia que imponemos a la estructura probabilitaria de los sucesos mecánicos: se trata de un tono nuevo, según mis informaciones y según resuenan en la literatura pertinente las aseveraciones de que no *es posible deducir así la mecánica cuántica (que se apoyaría, por el contrario, en sus propios principios soberanos). Y, en segundo término, un tono menor, que otros muchos han pulsado antes, de crítica del dogma actual, que afirma que el conocimiento por parte del observador, las imágenes subjetivas, el lenguaje alquitarado y la renuncia a la realidad objetiva son inherentes a la teoría.*

Si es que cabe entender el asombroso formalismo de la mecánica cuántica como algo necesario, una vez asumidos unos sencillos supuestos no cuánticos, alentaría una nueva forma de enfocar la enseñanza *de la teoría de modo sistemático, orgánico, como un* diseño cuántico, *en lugar de hacerlo como 'la extraña historia de los cuantos'* (*), *que sigue los erráticos caminos y rodeos de la historia. En vez de asimilar la fábula (en otro tiempo útil) de las dos imágenes, el estudiante podría aprender desde el principio que la mecánica cuántica ni es excesivamente abstracta y simbólica ni se ocupa del conocimiento o falta de conocimiento de los observadores, sino que relaciona entre sí datos de los instrumentos, como ocurre con cualquier otra rama de la física teórica.*

A. L.

NOTA.—Las cifras que se encuentran en el texto elevadas sobre la línea correspondiente, o sea, así: '(1)', remiten a la bibliografía que se encuentra en las páginas 161 y sigs.

(*) Alusión a la obra citada en el capítulo I, apartado 7 (véase también la referencia bibliográfica 4 del mismo capítulo). *(N. del T.)*

Capítulo I

Dualismo frente a mecánica cuántica

"No hemos de admitir más causas de las cosas naturales que las que sean verdaderas y, además, suficientes para explicar su apariencia."

NEWTON.

1. Descripción, interpretación y explicación.

El objetivo fundamental de este libro, aparte del de criticar la filosofía de los cuantos común actualmente en las escuelas, reside en proporcionar una *explicación* de las leyes de la teoría cuántica apoyada en una base no cuantista sencilla y elemental. Semejante programa parecerá, acaso, una fútil vueltecita por el aire a una generación de físicos a los que se ha dicho una y otra vez que *no* se puede reducir la teoría cuántica a nada más fundamental, o sea, que sus leyes son peculiaridades de la Naturaleza básicas e inexorables; opinión que parece verse confirmada por los muchos intentos (que abortaron durante la primera década de este siglo) de descubrir una fisura en la mecánica estadística clásica en la que cupiese introducir los niveles de energía discretos de Planck, tentativas que resultaron ser, pues, enteramente fútiles. En realidad, si se quieren extraer las leyes cuánticas de una base más elemental es preciso partir desde el primer momento de consideraciones probabilísticas, dejarse de apelar a la mecánica clásica y alegrarse mucho si ésta resulta que vale como aproximación estadística.

Pero, entonces, ¿qué quiere decir *explicar* las leyes cuánticas, y las leyes físicas en general? Veamos, por ejemplo, lo que sucede con las propiedades magnéticas de los átomos, que se han convertido en objeto de intenso interés merced al desdoblamiento magnético (de Zeeman) de las líneas espectrales. El autor descifró en 1922 el efecto Zeeman anómalo reduciendo las frecuencias atómicas observadas a niveles magnéticos de energía, lo cual reveló la existencia de diversos factores giromagnéticos (o factores *g)* de origen desconocido, que involucraban números cuánticos semienteros en los momentos angulares que intervienen en los modelos vectoriales [del momento angular total *(T.)]*; más tarde, Goudsmit y Uhlenbeck *interpretaron* el número cuántico ½ como pro-

pio de los electrones en rotación o giratorios; y, finalmente, Dirac logró *explicar* el *espín* [en inglés, *spin,* que significa literalmente rotación o giro *(T.)*] valiéndose a la vez de la teoría de la relatividad y de los principios cuánticos. La presente obra pretende ir todavía más allá: trata de explicar los principios cuánticos mismos, esto es, hacer patente que son consecuencias de unos principios aún más elementales que ya conocía la física precuantista.

Tomemos el caso de la teoría de la relatividad, si queremos otro ejemplo de descripción frente a explicación. Difícilmente se sentirá satisfecho un estudiante de física al enterarse de que las varillas que se desplazan se contraen, los relojes en movimiento marchan más despacio y los defectos de masa corresponden a un exceso de energía de acuerdo con la ecuación $E = mc^2$, si lo que se le dice es que todo ello constituye un conjunto de propiedades básicas de la materia, ínsitas en ella, que no son susceptibles de explicación ulterior; pero la deducción einsteiniana de los fenómenos relativísticos a partir de unos postulados generales de simetría e invariancia aplicados a una combinación de mecánica y óptica nos ha ofrecido la explicación deseada. Entonces, ¿por qué habríamos de admitir que leyes cuánticas tales como $E = h\nu$ representan propiedades del mundo físico irreducibles e inherentes a él, o, cosa todavía menos convincente, que son «consecuencias del dualismo de la imagen ondulatoria y la corpuscular»? (para la localización de estas citas véase el capítulo VIII). Verdaderamente, la creencia en que la naturaleza dual de la materia y de la luz es *fundamental* ha bloqueado todo intento de llegar a comprender mejor la teoría cuántica a lo largo de más de tres decenios, al fomentar la opinión de que el estudiante, «tras aprender las triquiñuelas [matemáticas] del oficio», acabará por «comprender que no hay nada que comprender» acerca del «porqué» de las leyes cuánticas. El presente libro constituye un desafío a semejante enfoque, puramente descriptivo: pretende hacer ver que cabe *explicar* la desconcertante interferencia de probabilidades, con su aspecto ondulatorio, y las reglas cuánticas ($E = h\nu$, etc.) como consecuencias necesarias de unos postulados generales de simetría e invariancia que se impongan a la estructura de una métrica probabilitaria, de igual modo que la ley de Einstein $E = mc^2$ se ha extraído de unos postulados análogos aplicados a una combinación de mecánica y óptica en la que la velocidad de la luz sea la medida del espacio y el tiempo.

Este primer capítulo se propone mostrar que es posible explicar la difracción electrónica y los demás fenómenos de aspecto ondulatorio relacionados con ella partiendo de una acción puramente mecánica entre partículas, sin interferencia de ondas.

2. La difracción a través de cristales.

La principal pieza de convicción en favor de la naturaleza dual de la materia ha sido (y para muchos físicos sigue siéndolo todavía) el famoso experimento de la difracción material. Se lanza contra un cristal un rayo homogéneo de cargas eléctricas, constituido sin género de duda por electrones individualmente contables, con sus concentradas cargas, rayo que es reflejado por el cristal. Según exigen las leyes de conservación de la energía y el momento, el ángulo de reflexión es igual al de incidencia; mas acontece también un hecho muy curioso, a saber: que la reflexión se produce solamente cuando el ángulo de incidencia toma una serie de valores discretos: así se engendran puntos o líneas discretos (en lugar de una banda de cierta anchura) cuando la intensidad reflejada se recoge en una película fotográfica, lo cual constituye un espectáculo verdaderamente asombroso —y uno de los puntos fuertes, en cuanto a vistosidad, de la física atómica—. ¿Cuál puede ser la causa de esta reflexión selectiva?

Resulta que cabe *calcular* los discretos ángulos de reflexión imaginando que cada electrón, que llega dotado de un momento p, se extiende en las cercanías del cristal en un amplio agregado ondulatorio de longitud de onda $\lambda = h/p$ (h es la constante de Planck) que cubra todo el cristal, y que estas «ondas de materia» se reflejan simultáneamente en los planos de la retícula cristalina, que son paralelos y se encuentran entre sí a la distancia l; tras de lo cual la interferencia ondulatoria, de acuerdo con el principio de superposición de Huyghens, da unas intensidades reflejadas vigorosas únicamente en las direcciones angulares que correspondan a diferencias de camino recorrido de una, dos, ..., n longitudes de onda. Una vez cumplido su deber, las ondas vuelven a adoptar la forma de partículas, según muestra con toda evidencia la formación de la figura de reflexión por acumulación estadística de impactos individuales en una película fotográfica; y los máximos interferenciales se encuentran en las direcciones, θ, que satisfacen la regla (fig. 1, a).

$$2l \operatorname{sen}\theta = n\lambda \qquad \text{(Bragg)} \tag{1}$$

en la que el primer miembro representa la diferencia de los caminos recorridos por dos trenes de onda reflejados en dos planos sucesivos de la retícula.

No hay nada que objetar a esta hipótesis transmutativa tan sobrenatural o, según la consideran otras personas, de tan gran amplitud de miras intelectuales (?), con tal de que se la considere como un primer paso de exploración en un territorio desconocido y pendiente de aclaración ulterior; pero, en lugar de hacer un intento por aclarar el misterio apoyándose en razones físicas, los físicos se embarcan en una vía que mira la doble manifestación como una verdad

incontrovertible, y eluden el problema de la constitución *real* de la materia (si es que son ondas o partículas) merced a un refinado escepticismo acerca de la

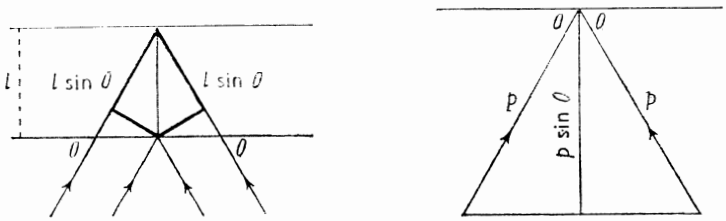

Figura 1, a y b

idea de realidad física. Es muy posible que todo —desde los árboles a los neutrinos y las galaxias— sea una construcción mental configurada en una *Gestalt* a partir de unas impresiones sensoriales caóticas: eso ya lo sabemos; pero en la ciencia, lo mismo que en la vida ordinaria, no se emplea el término 'real' con otro sentido que el que tiene cuando se dice que las nubes consisten realmente en gotitas de agua, por más que puedan aparecer como una sustancia continua y gris; y cualquier imagen de difuminada apariencia de una película consiste, en realidad, según revela un examen más de cerca, en muchos granos individuales ennegrecidos uno tras otro en forma estadística. Por lo demás, tampoco sirve para nada, en cuanto a eliminar el dilema de la difracción se refiere, sustituir la sobrenatural transmutación directa e inversa por una misteriosa «manifestación dual» (que constituye un recurso puramente lingüístico), como tampoco hablar de la «imagen» ondulatoria que se obtiene por reacción con el cristal y de la «imagen» corpuscular a distancia de él: la tarea de la teoría física no consiste en inventar figuras verbales, sino en entender los fenómenos atómicos mediante una teoría coherente que represente una realidad física. Si cada electrón está inicialmente concentrado en un intervalo de 10^{-12} centímetros o menos, ¿cómo podrá jamás extenderse sobre una distancia más de un billón de veces mayor (o, como dirían algunos, manifestarse como si se extendiera así)? Aun cuando suele creerse que sin la doble manifestación serían imposibles de explicar la difracción de la materia y otros fenómenos de coherencia, tal imposible se logró nada menos que en 1923 por el físico norteamericano W. Duane, uno de los adelantados hoy casi olvidados de la mecánica cuántica moderna.

3. Mecánica de la difracción sin ondas.

Según Duane ([1]), los corpúsculos materiales incidentes no se extienden en ondas continuas de materia, ni se manifiestan como si lo hicieran; es el cristal

el que se encuentra ya extendido en el espacio y reacciona como un cuerpo mecánico rígido ante las partículas incidentes, obedeciendo a las leyes de conservación de la mecánica, pero con la siguiente restricción (regla cuántica de Duane para el momento lineal):

Un cuerpo espacialmente periódico con periodicidad lineal de intervalo L puede alterar su momento lineal p, paralelo a L, solamente por cantidades $\Delta p = h/L$.

El ejemplo más destacado de cuerpo espacialmente periódico es el cristal. Y si l es la distancia que guardan entre sí un conjunto de planos paralelos de la retícula, no sólo poseerá la periodicidad $L = l$, sino, asimismo, otras periodicidades de orden superior, $L = \frac{1}{2}\, l$, $\frac{1}{3}\, l$, etc.; por lo cual, según la regla cuántica de Duane, puede alterar su momento perpendicular a los planos de la retícula por cantidades

$$\Delta p = h/l,\ 2h/l,\ 3h/l,\ \cdots\ nh/l\cdot \qquad (2)$$

Cuando estos momentos selectivos se comunican por el cristal a las partículas incidentes, éstas sufren una deflexión que las lleva exactamente en las mismas direcciones discretas que cabe *calcular* también por medio de la teoría de la interferencia de ondas de Laue-Bragg; pero ahora se llega a tal resultado teniendo en cuenta consideraciones puramente de mecánica de partículas, sin que entre la doble manifestación ni ninguna otra «anomalía causal» —expresión de Reichenbach—. En efecto: cuando un corpúsculo incide y es reflejado bajo el mismo ángulo θ (según exigen las leyes de conservación), la componente paralela a L de su momento cambia en $2p \cdot \operatorname{sen} \theta$, y la regla cuántica anterior nos da la relación (fig. 1b, pág. 16).

$$2p \cdot \operatorname{sen} \theta = nh/l \quad \text{(Duane)}, \qquad (3)$$

que es idéntica a la regla de ondas de Bragg (1), sin más que traducir el momento p en una longitud de onda, $\lambda = h/p$, en las cercanías del cristal y retraducir ésta de nuevo en un momento, p, tras la reflexión; sólo que *la regla de Duane proporciona directamente la misma deflexión observada, sin apelar a un intermedio ondulatorio*. Así pues, la idea de una transformación dualística de partículas materiales a ondas es una invención enteramente innecesaria, si es que no fantástica, por más que en algunas ocasiones pueda ser útil valerse de ella: «*Se non è vero, è ben trovato*».

La regla cuántica de Duane, relativa a la modificación del momento lineal en los cuerpos de periodicidad L, no es, en modo alguno, algo inventado *ad hoc* (frente a lo que ocurre con la doctrina dualística), sino que, por el contrario, corre parejas legítimamente con las dos conocidas reglas cuánticas referentes a la energía, E, y al momento angular, p_φ, o sea, con la regla de Planck,

$\Delta E = h/T$, y con la de Sommerfeld-Wilson, $\Delta p\ \phi = h/2\pi$, aplicables, respectivamente, a cuerpos temporalmente periódicos con período T (oscilador armónico) y a cuerpos periódicos con respecto al giro de 360 grados $= 2\pi$ radianes (cualquier cuerpo). (Si el sistema posee varios períodos temporales inherentes a él, T_1, T_2, ..., como sucede en los átomos, según revela su espectro, puede alterar su energía en una cualquiera de las cantidades $\Delta E = h/T_n$, lo cual constituye la condición frecuencial de Bohr; y si el cuerpo posee periodicidades angulares de orden superior, o sea, si es un polígono regular de periodicidad $2\pi/n$, su momento angular puede variar por cantidades $\Delta p_\varphi = nh/2\pi$.) Desde luego, las tres reglas cuánticas son muy desconcertantes, y la opinión corriente es que tenemos que aceptarlas tal y como se nos presentan, como principios cuánticos fundamentales e irreducibles; sin embargo, según pretendemos poner en claro más adelante en este estudio, cabe *explicarlas* como consecuencias necesarias de unos postulados de simetría e invariancia sencillos y generales, desprovistos de toda clase de ingredientes cuánticos (mas en la presente introducción las damos por buenas, sin más).

Es extraño, sin embargo, que, si bien se reconoce que las dos primeras reglas cuánticas constituyen los instrumentos más importantes del teórico cuántico, apenas se menciona la tercera regla, la correspondiente al momento lineal (o sea, $\Delta p = h/L$), pese a que, merced a la teoría duaniana de la reflexión de corpúsculos por los cristales, asesta un golpe fatal a la doctrina de la dualidad de onda y partícula en la materia, al dogma de que hemos de contentarnos con la «extravagancia» —término de Schrödinger— de dos imágenes alternativas en lugar de una realidad física. Así pues, cuando se nos dice autoritariamente [2] que «la mecánica cuántica ha descubierto que el mismo objeto físico, por ejemplo, un electrón, aparece en dos formas que al parecer se excluyen», hemos de replicar que, por el contrario, la mecánica cuántica ha descubierto que es posible entender en forma unitaria incluso unos fenómenos de apariencia tan ondulatoria como la difracción de la materia a través de los cristales: entenderlos como algo debido solamente a partículas materiales que obedezcan las leyes mecánicas de conservación, si bien sujetas a unas restricciones especiales que se aplican a los cuerpos dotados de periodicidades temporales y espaciales; pues los electrones se comportan siempre como corpúsculos, *nunca se portan mal conduciéndose como ondas.* Una cosa es hacer saber al adepto que puede obtener resultados apropiados al comportamiento estadístico de muchas partículas valiéndose de un método matemático de apariencia ondulatoria y reinterpretando luego la intensidad de onda como una densidad de distribución estadística de partículas, y otra cosa muy distinta proclamar *urbi et orbi* que la materia posee una estructura física dual y que aparece en dos imágenes, unas veces como ondas y otras como partículas: aunque esta última doctrina

ha llamado mucho la atención, se ha convertido en algo falaz por virtud de la tercera regla cuántica, de Duane, a la que, sin duda alguna, habría que otorgar análogo estatuto que a las otras dos reglas cuánticas.

Hay quien ha reargüido al respecto: «Duane mira al cristal como un mecanismo que actúa gracias a sus componentes espacialmente periódicos, mientras que otros asumen que los electrones se extienden ocasionalmente; ¿qué más da una cosa que otra?». Pero realmente el enfoque científico es muy distinto: de acuerdo con la idea de la dualidad, un pequeño corpúsculo se convierte milagrosamente en algo periódico y se difunde por el espacio; mas, de acuerdo con la mecánica cuántica y Duane, el cristal está ya allí, es periódico y se extiende en el espacio sin «manifestaciones» suplementarias. La dualidad nos pide que creamos que una *cosa* se transforma en otra, o actúa como si lo hiciera, lo cual es algo mágico (y a lo largo de todo este libro lo calificaremos como tal); mientras que la mecánica cuántica sólo nos pide que admitamos una *acción* (cuántica) aparentemente extraña, acción que puede explicarse —véanse los capítulos VI y VII— con razones elementales como enteramente natural. La dualidad es una ideología enormemente implausible, que no niega haber sido introducida *ad hoc* con objeto de hacer frente a una aparente paradoja, mientras que la regla de Duane es física legítima; y, sin embargo, el dogma de la sobrenatural doble manifestación ha arraigado hoy tan sólidamente que le recuerda a uno la observación general de Sidney Hook: «La diferencia entre ciencia y religión consiste en que la primera quiere deshacerse de misterios, en tanto que la segunda los adora».

Es preciso hacer hincapié ahora en que existe una gran diferencia entre las reglas de la mecánica cuántica relativas al intercambio de energía y de momento en los cuerpos físicos temporal o espacialmente periódicos ($\Delta E = h/T$, $\Delta p = h/L$ y $\Delta p_\varphi = h/2\pi$) y las fórmulas que traducen datos mecánicos de partículas aisladas en una imagen ondulatoria, como son $E = h\nu$ y $p = h/\lambda$; y, o bien las reglas relativas a la energía y el momento representan la física legítima, o es la traducción de los corpúsculos en ondas de materia la que lo hace; por mi parte, sigo confiando en que, cuando se desafíe seriamente a los teóricos cuánticos a elegir entre uno y otro conjunto de reglas, se decidirán en favor de las reglas físicas de intercambio de energía y momento, y reconocerán que las de traducción son simples muletas ideológicas. Lo cual no es discutir la tremenda influencia ejercida por la idea brogliana de las ondas de materia ni su valor con fines heurísticos; pero si Newton tenía razón en el lema del presente capítulo, la teoría unitaria de las partículas materiales (esto es, la mecánica cuántica) es preferible a la antieconómica y *enteramente superflua* hipótesis del dualismo, y asimismo a una teoría ondulatoria unitaria, que sólo es posible a costa de una enorme complicación (véase el apartado 36). El dualismo

se detiene ante la observación de que la materia unas veces *parece ser* corpúsculos y otras *parece ser* ondas: no seamos unilaterales y adoptemos como principio este «parecer ser». Sin embargo, hay algunas personas que no tienen tal amplitud intelectual de miras y querrían saber qué es lo que hay tras las dos imágenes o modelos subjetivos: para ellas la respuesta se encuentra en la tercera regla cuántica de la mecánica, que es tan legítima como las otras dos.

La razón por la cual la regla cuántica de Duane no se advirtió inmediatamente como vía de escape de la paradoja de la dualidad es histórica: Duane propuso su teoría estadística corpuscular de la difracción de los rayos X en favor de la teoría fotónica de la luz, y en aquella época (1923) no se había descubierto aún la difracción de los electrones; además, la regla cuántica $\Delta p = h/L$ para los cuerpos espacialmente periódicos con periodicidad L parecía artificial y concebida *ad hoc*. Sin embargo, a partir de 1926 las tres reglas cuánticas han salido victoriosas, y no hay razón para que se pase por alto únicamente la tercera y se admita, en cambio, un principio de dualidad que adjudica un nombre más o menos apropiado a un dilema en lugar de resolverlo de forma científica. Actualmente, tras reiterarla sin fin, es posible que la naturaleza dual de la materia parezca a los expertos tan obvia e indiscutible como lo parecía la inmovilidad de la Tierra a los sabios colegas de Galileo, que se negaban a mirar por el telescopio porque les daba vértigo; con todo, Duane ha hecho tanto por disipar el fantasma de la dualidad como hizo Gregor Mendel por eliminar el inveterado mito de la herencia por medio de la mezcla continua de sangre en favor de la teoría estadística de las partículas génicas; pero es probable que Duane tenga que esperar tanto como el abad austriaco a que su interpretación y explicación estadísticas de los fenómenos de difracción de aspecto ondulatorio se reconozcan como pasos decisivos hacia la moderna mecánica cuántica, como el «eslabón perdido» entre las apariencias ondulatorias y la corpuscular realidad.

4. El experimento de las dos ranuras.

Veamos ahora el discutido experimento de la difracción de materia al atravesar una pantalla dotada de una o dos ranuras. Cuando se dispone una sola ranura se obtiene una distribución difusa de la intensidad, centrada alrededor de la línea de incidencia directa del rayo material; pero si ahora se abre otra ranura adyacente a la primera, varios lugares antes iluminados se convierten en oscuros. ¿Cómo puede explicarse que la *apertura* de una segunda rendija *bloquee* la llegada de corpúsculos a lugares en los que antes incidían, si es que no se produce una transformación temporal de los corpúsculos en ondas y la

interferencia de éstas? Tal es, verdaderamente, la pregunta decisiva, de la que tratan montones de libros, revistas, simposios y discursos claves. La solución científica de este problema se encuentra en una investigación de Ehrenfest y Epstein ([3]), sumamente olvidada y que representa un desarrollo ulterior de la teoría de Duane: la partícula incidente no reacciona con esta o la otra ranura individual (o varilla, en el caso del experimento recíproco), ni tampoco con este o aquel punto de la retícula de un cristal; pues una ranura es algo más que una mera nada, es una nada con algo en torno suyo, y esto es tan importante como aquélla; una pantalla dotada de una ranura posee componentes espaciales periódicos de varias longitudes, L, que integran su forma geométrica, y la que esté dotada de dos ranuras tendrá un conjunto distinto de valores de L; y puesto que cada uno de los componentes L da lugar a una transferencia de impulsos de valor $\Delta p = h/L$, los dos casos considerados (con una y con dos rendijas) darán lugar a ángulos de deflexión distintos y a intensidades diferentes. Las figuras de difracción producidas estadísticamente por las partículas tras la deflexión concuerdan, en ambos casos, con las que *asimismo* se obtienen a través de la traducción a ondas y la retraducción a corpúsculos; pero así resulta que cabe prescindir de la hipótesis de dos modelos alternativos.

Por consiguiente, la respuesta a la eterna pregunta acerca de «por cuál de las dos ranuras pasa el electrón» (suponiendo que no realice el milagro de extenderse sobre las dos) es: «En lo que se refiere a la figura de difracción que ha de resultar, es indiferente el lugar exacto en que tenga lugar la deflexión»; pues la alteración del momento del electrón es una reacción a los componentes armónicos de la distribución de la materia en el todo formado por la pantalla con las dos ranuras, e incluso cabe que el electrón deflejado no sea idéntico con el incidente: lo único que importa es la conservación de la carga y del momento total durante la reacción entre el electrón y el elemento difractor.

Indudablemente, es notable que el resultado de la reacción mecánica cuántica entre corpúsculos pueda también obtenerse por el rodeo del cálculo de ondas; sin embargo, este éxito de la teoría ondulatoria es sólo parcial: se necesitan partículas discretas para dar razón de la formación de la figura de difracción por acumulación estadística. La mecánica cuántica de corpúsculos sin manifestación ondulatoria explica todas las peculiaridades a la vez; de modo que, si bien Schrödinger ha caracterizado justamente la noción de dualidad como «una extravagancia dictada por la desesperación consecuente a una grave crisis», ésta ha quedado resuelta de una forma científica sencilla sin transmutaciones ni manifestaciones mágicas. Sin embargo, en los numerosos debates de los fenómenos de difracción de la materia, que supuestamente nos forzarían a

aceptar la dualidad, la solución de Duane valiéndose de la tercera regla cuántica se mantiene algo así como un secreto celosamente guardado (*).

Cuando un oscilador de frecuencia ν emite un cuanto de energía $\Delta E = h\nu$, este último sólo puede ser absorbido por otro sistema capaz de oscilar con la misma frecuencia (o sea, otro oscilador), por un átomo que posea la frecuencia $\nu = \Delta E/h$ en su espectro discreto, por la radiación ambiente que contenga, entre las frecuencias de su gama, la ν o, finalmente, por una partícula libre capaz de admitir cualquier ΔE. Dicho brevemente: la conservación de la energía durante el intercambio de la energía cuantizada está sujeta a la condición de la ***resonancia de frecuencias;*** de modo que, frente al esfuerzo de Schrödinger por *sustituir* los «saltos de energía» por la resonancia frecuencial, ambas cosas marchan codo con codo. En lo que se refiere al intercambio de momento entre cuerpos espacialmente periódicos, son válidas las consideraciones análogas correspondientes. Así pues, cuando se imagina que el intercambio de energía y de momento cuantizados acontecen en ocasiones y lugares perfectamente localizados, en forma de saltos, se va más allá tanto de la experiencia como de la teoría.

Las reglas cuánticas $\Delta E = h\nu$, etc., se suelen admitir como fundamentales e incapaces de explicación ulterior; más adelante veremos, sin embargo, que tales reglas son consecuencia directa del requisito de que la teoría probabilística de los procesos mecánicos (= la mecánica cuántica) sea invariante con respecto a las traslaciones de los puntos origen del espacio, el tiempo, el espacio de momentos y la energía.

5. La coherencia.

Un argumento que se esgrime con frecuencia en favor de la teoría ondulatoria es la aparente imposibilidad de explicar los fenómenos de *coherencia* sin valerse de la interferencia de ondas; pese a lo cual vamos a ver que la teoría cuántica de partículas conduce exactamente a los mismos resultados observados, con tal de que se utilice la tercera regla cuántica. Es posible escindir un rayo

(*) Max Born escribe en una carta al autor: «Cuando se publicó el estudio de Duane de 1923 sobre la teoría corpuscular de la difracción de los rayos X, fue muy apreciado». Pero entonces es todavía más enigmático por qué se pasó por alto su importancia cuando, unos pocos años más tarde, se descubrió la difracción de la materia y por qué ha permanecido ignorado treinta y tantos años. He rastreado los escritos de Bohr, Born, De Broglie, Dirac, Einstein, Heisenberg, Pauli, Schrödinger y otros muchos autores en busca de algún asomo de reconocimiento de que la tercera regla cuántica es pertinente para el pretendido dilema de la difracción de la materia y de la dualidad: no se encuentra la menor huella de tal cosa.

(casi) monocromático en dos partes que luego se recombinen; y esto último puede efectuarse, o bien sin que haya diferencia entre la longitud de los caminos recorridos, caso en que se obtienen unos máximos de intensidad (casi) completamente nítidos cuando se los hace pasar a través de un dispositivo de difracción, o bien con unos máximos de difracción que gradualmente se van desvaneciendo (cuando aumenta poco a poco la diferencia entre los caminos recorridos, o sea, cuando el recorrido común se acorta). Estudiemos primeramente el experimento desde el punto de vista ondulatorio.

La vida media de la fuente, δt_0, determina el intervalo de coherencia, δL_0, a lo largo del tren de ondas. Es perfectamente conocido que un agregado de ondas de longitud δL_0, cuando se lo somete a análisis espectral por medio de un dispositivo difractor, resulta abarcar toda una gama de longitudes de onda, λ, y de los correspondientes «números de onda», $\kappa = 1/\lambda$, gama cuyo ancho de banda es $\delta\kappa_0 = 1/\delta L_0$. Si se divide en dos el rayo y se recombinan las dos partes sin que haya diferencia de recorridos, la anchura del espectro del conjunto sigue siendo $\delta\kappa_0$, de modo que un analizador espectral (instrumento difractor, ya sea un cristal o una gratícula) permitirá ver unos máximos ligeramente difusos, testimonio del ancho $\delta\kappa_0$; si ahora se juntan de nuevo las dos partes con una diferencia de recorrido, de suerte que el intervalo común a ambas se reduzca desde δL_0 a una longitud menor, δL, esta restricción espacial va ligada a un ancho espectral mayor, $\delta\kappa = 1/\delta L$, y, por tanto, a una figura de difracción más difusa; y cuando δL tiende a *cero*, el ancho del espectro, $\delta\kappa$, del rayo recombinado pasa a *infinito*, y no se observan máximos algunos apreciables.

Traduzcamos ahora el formalismo de la *hipotética* consideración ondulatoria a la *física* de la mecánica de partículas materiales, y recordemos que la tercera regla cuántica explica la existencia de unos máximos de intensidad nítidos correspondientes a unos ángulos de difracción determinados en el caso ideal de un rayo «monocromático» de corpúsculos, todos los cuales posean el mismo momento, p. En cambio, cuando éstos proceden de una fuente de vida media δt_0, a la que corresponderá un camino de longitud δL_0, esta limitación espacial física involucra (según el teorema de incertidumbre de Heisenberg) una dispersión estadística de los momentos de las partículas en una gama $\delta p_0 \approx h/\delta L_0$, lo cual conduce a una dispersión de los ángulos, θ, de la intensidad deflejada que se obtenga mediante un instrumento difractor (cristal), en virtud de la regla de Duane (3); el mismo «achatamiento» de los máximos se produce cuando se divide en dos el rayo corpuscular y las dos partes se recombinan sin que haya diferencia en los caminos recorridos (esto es, de forma que el intervalo común a ambos siga siendo δL_0). Sin embargo, cuando reducimos deliberadamente este último a una longitud menor, δL, en virtud de la regla de incertidumbre esta limitación espacial está vinculada a un ensanchamiento de la

gama estadística de valores del momento, gama que ahora valdrá $\delta p \approx h/\delta L$; y ello, según la teoría de Duane, origina una difusión ulterior de los máximos de difracción; cuando δL llega a *cero,* δp se convierte en *infinita,* y el intervalo común (que ha llegado a anularse) no da lugar a máximos de difracción discretos algunos. Estos resultados son independientes de la intensidad absoluta del rayo de materia, y son asimismo válidos cuando las partículas se siguen una a otra a gran distancia: se trata de pura teoría de partículas, también conocida con el nombre de mecánica cuántica; y la «coherencia» que se manifiesta en la aparición de máximos discretos depende de la longitud del intervalo común, δL. Pero lo mismo sucede en la teoría ondulatoria, en la cual carece de importancia para la cuestión de la coherencia que el intervalo común, δL, contenga muchas ondas λ, sólo una fracción de la longitud de onda o ninguna en absoluto; y tal es la razón decisiva para la equivalencia de ambas teorías de la coherencia.

Otras consideraciones parecidas responden a la pregunta acerca de cómo puede explicar la mecánica de partículas (y, en particular, la tercera regla cuántica) el *desplazamiento* de todo el sistema de máximos de varios órdenes cuando se altera la diferencia de los caminos recorridos por las dos mitades del rayo que se sobreponen de nuevo. En efecto: dos ranuras en una pantalla originan una figura formada por varios máximos; cuando la distancia entre las ranuras varía, la diferencia de recorridos de los dos rayos que incidan en un punto cualquiera de la película fotográfica variará asimismo, y, según la teoría ondulatoria, ello producirá un corrimiento de la posición de los máximos, en virtud de la interferencia de las ondas. En la mecánica de partículas se obtiene el mismo resultado, pues la modificación de la distancia entre ranuras altera las periodicidades, L, de la estructura espacial de la pantalla con las rendijas, y hace cambiar, en consecuencia, los momentos laterales, $\Delta p = h/L$, impartidos a las partículas incidentes; este resultado concuerda con el de la teoría de la interferencia de ondas, según el desarrollo de Epstein-Ehrenfest de la teoría de Duane. Repitámoslo una vez más: es absolutamente erróneo decir que, según la física *moderna,* el electrón es una «ondícula», mitad onda y mitad partícula.

6. La reflexión en una pared.

Una doctrina tan formidable como el dualismo no debería apoyarse tan sólo en el caso o par de casos con vistas a los cuales se ideó (y en los que resulta no ser imprescindible), sino, asimismo, en otros. Veamos el ejemplo de la reflexión de partículas en una pared plana. Como las paredes ordinarias no tienen

estructura periódica, o bien contienen elementos espaciales periódicos, L, de cualquier longitud, pueden emitir cualquier momento $\Delta p = h/L$, sin selectividad; y por ello la reflexión tiene lugar sometida a las leyes de conservación de la energía y el momento, pero bajo cualesquiera ángulos, sin restricción. Sin embargo, un dualista que no quiera abandonar su causa en combate habrá de mantener que el rayo de materia incidente se manifiesta al principio y al final de acuerdo con la imagen corpuscular, mientras que sobre la pared lo hace de acuerdo con la imagen ondulatoria: las ondas producirán otras secundarias (principio de Huyghens), las cuales, en virtud de su interferencia, serán responsables del cumplimiento de la ley de la reflexión angular. Mas ¿por qué recurrir a la fantástica idea de la doble manifestación cuando la mecánica unitaria de partículas basta antes, en y después de la reflexión?

En el caso de la *refracción* nos encontramos en una situación análoga: cabe explicar la ley de Snell apoyándose en la teoría newtoniana de la emisión sin más que permitir que las partículas luminosas adquieran un momento, p, mayor en la superficie divisoria, y basándose en la teoría ondulatoria de Huyghens si se admite que las ondas luminosas adquieren una longitud de onda, λ, más pequeña. Nos encontramos, así, en las raíces de la antigua controversia dualística sobre la luz, cuyo puente lo forma la ecuación $p = h/\lambda$. Más tarde surgió el mismo problema con respecto a la materia: en el mismo año 1923, en que Duane explicaba los fenómenos de difracción de aspecto ondulatorio por medio de su tercera regla cuántica para corpúsculos, proponía De Broglie las ondas de materia para explicar la cuantización de los valores de la energía y del momento angular en los átomos. Actualmente, merced a todos los elementos de juicio mientras tanto acumulados, se ha llegado a decidir por una mecánica cuántica unitaria de las partículas materiales y una mecánica cuántica unitaria de las ondas luminosas: de acuerdo con la teoría de la radiación que estudia su reacción con la eléctrica materia (Dirac, Fermi, Heitler), ni hay unas ondas materiales continuas que llenen todo el espacio ni unos «fotones» discontinuos saltando de un lado para otro, sino *partículas de materia* que reaccionan cuantizadamente con *ondas de luz;* así pues, puede decirse que en lo que se refiere a la materia ha salido victoriosa la teoría newtoniana de la emisión, y en lo que atañe a la luz, la teoría ondulatoria huyghensiana: ni para la materia ni para la luz hay necesidad alguna de tener las dos cosas al mismo tiempo.

Se ha preguntado (en forma especialmente persistente por H. V. Stopes-Roe en varias cartas a *Nature)* acerca de *cómo* —esto es, mediante qué acción mecánica— puede actuar un cristal de periodicidad L como un todo mecánico dotado de muchos períodos L extendidos sobre un espacio considerable, en forma tal que altere su momento de acuerdo con la regla cuántica $\Delta p = h/L$: ¿no es más razonable suponer que cada electrón incidente se extiende como

una onda sobre muchos intervalos L, según piensan los dualistas? A mi entender, esta última hipótesis ofrece muchos más motivos de insatisfacción que la actuación de un sistema como una entidad completa: quien pregunte cómo puede reaccionar todo un cristal en un solo punto de acuerdo con la regla cuántica $\Delta p = h/L$, algo así como siendo «consciente» de su periodicidad general, podría igualmente preguntar *cómo* puede modificar todo un cuerpo su momento angular obedeciendo a la regla $\Delta p_\varphi = h/2\pi$, algo así como consciente de su periodicidad con respecto a un giro de 2π radianes, o cómo puede alterar su energía por cantidades $\Delta E = h/T$ un oscilador de período T (la diferencia reside en que los dos últimos casos son perfectamente conocidos y admitidos, mientras que el primero parece ser desconocido). En resumen: ¿cómo puede un cuerpo periódico actuar concertadamente de acuerdo con las reglas cuánticas? Sólo puede actuar de tal modo en caso de que la comunicación sea instantánea; lo cual, indudablemente, no es válido en el campo relativista, de modo que en él las reglas cuánticas únicamente serán aplicables con ciertas reservas (¿cómo puede aplicarse el principio de exclusión de Pauli a dos electrones, uno de los cuales esté aquí y el otro en Sirio?). Con todo, sigo creyendo que las reglas cuánticas de la mecánica son incomparablemente más realistas que la idea de la transmutación de la materia de corpúsculos a ondas y luego de nuevo a corpúsculos; y de poco vale que esta última se proteja con eufemismos que la traten de doble manifestación «como si», mental, subjetiva o irreal (*).

7. Discurso del método.

En su popular librito *The Strange Story of Quantum [La extraña historia de los cuantos]*, Banesh Hoffmann ([4]) dice lo siguiente acerca del problema de la dualidad: «Si es que el espacio y el tiempo no son la estofa fundamental del universo, sino que son meramente ... efectos estadísticos de multitudes de otras entidades más fundamentales situadas a mayor profundidad, deja de ser extraño que estas últimas entidades nos presenten unas propiedades tan poco concordantes como las de onda y corpúsculo. Acaso haya, después de todo, cierta lógica innata en las paradojas cuánticas».

Estoy completamente de acuerdo con la última frase y con la petición de que se expliquen físicamente las propiedades poco concordantes, en lugar de

(*) De manera análoga, una componente periódica de un campo de radiación extenso en el espacio y el tiempo transmite un cuanto de energía $h\nu$ a otro cuerpo (oscilador electrónico, átomo), no a través de una acción local de Maxwell-Lorentz, sino *como un todo*, sometiéndose a las reglas de la probabilidad cuántica y de resonancia durante la interacción.

acabar con ellas como «manifestaciones»; pero no creo que sea necesario recurrir a nuevas entidades más allá del espacio y el tiempo: las tres reglas cuánticas de la mecánica bastan para llevar de la extraña historia a la historia natural de los cuantos. Y, sin embargo, pese a la obra de Duane y de Born, el parloteo acerca de la dualidad ha sobrevivido como tema favorito de consumo popular: es el punto de partida de una nueva teoría del conocimiento en la que las imágenes (incluso las contradictorias) han reemplazado a la búsqueda tradicional de la realidad física, desdeñando el hecho de que se ha recuperado el aspecto unitario de la materia merced a la interpretación y observación estadísticas y a la tercera regla cuántica. Aún más: frente a lo que ocurre con las «imágenes», es posible *explicar* las mismas reglas cuánticas, esto es, cabe deducirlas de unas proposiciones sencillas y generales de carácter no cuántico, según hacemos ver en los últimos capítulos de este libro. Por el contrario, el dualismo no es sino una palabra descriptiva, y, además, desorientadora: pues ha llevado a la pseudofilosófica opinión de que es preciso no formular ya más preguntas acerca de la constitución real de la materia, dado que todas las cosas, desde las estrellas a los árboles y desde los corpúsculos a las ondas, son meras construcciones mentales, son imágenes, de suerte que habría que colocar entre comillas la palabra 'reales' al referirse con ella a «cosas». ¡Muy bien!; pero entonces habría que colocar las ondas de la teoría cuántica entre comillas dobles, por representar distribuciones estadísticas de partículas, por ser imágenes dentro de la imagen corpuscular. Mi propuesta al respecto es que nos permitamos tales lujos solamente en el discurso filosófico —supuesto que lo hagamos, en absoluto—, que en el laboratorio y en la vida ordinaria hablemos sin restricciones de estrellas, de árboles y de partículas atómicas como de cosas reales [«susceptibles de puntapié», como decía el doctor Johnson (*)], y que pongamos únicamente las no capaces de puntapié ondas ψ entre comillas, puesto que no se refieren a cosas, sino que son tablas de probabilidad resumidas. No cabe duda de que se malemplea la lógica elemental al estatuir con orgullo (y prejuicio) una dualidad y complementaridad entre un objeto material y una tabla probabilística de sucesos, como si una y otra cosa se encontrasen al mismo nivel conceptual: de acuerdo con tal lógica, los enfermos de fiebres recurrentes serían dualísticos, ya que, por una parte, son individuos y, por otra, la probabilidad de encontrarlos en la cama con fiebre presenta altas y bajas a modo de una onda.

En cierto sentido, la objetividad es intersubjetividad. Por ello, mientras ha-

(*) SAMUEL JOHNSON (1696-1782), pensador norteamericano, del cual se cuenta que dio un puntapié a una piedra para refutar el idealismo de Berkeley (haciendo ver la realidad de aquélla). *(N. del T.)*

bía gente que veía partículas y otra que veía ondas, era un compromiso justificado sustentar la tesis de que la materia no *tiene* una constitución objetiva definida y de que, en definitiva, todo es una imagen mental. Pero si todo el mundo (en la medida en que estén enterados de la tercera regla cuántica) ve corpúsculos incluso en el caso de la difracción de la materia, éstos se convierten en sus únicos componentes reales, como por su parte averiguaron los químicos hace siglo y medio.

Mas una vez que se ha aceptado *la grande illusion* de la dualidad —lo de que los electrones se portan mal y hacen como si llenasen todo el espacio (en lugar de decir, como es exacto, que la distribución estadística de una gran cantidad de electrones da lugar a veces a una configuración de aspecto ondulatorio)— no hay modo de poner coto a las malas interpretaciones: si una partícula no es siempre una partícula, ello quiere decir que «tenemos que dejar de pensar en objetos», que «se produce un colapso de la categoría de sustancia» y que «hemos de adaptar la lógica que utilicemos a la nueva situación» (Von Weizsäcker, en *Zum Weltbild der Physik [Sobre la imagen física del mundo]*). Por mi parte, me niego a adaptar la lógica que utilizo y a dejar de pensar en objetos, y deploro el colapso de la categoría de sustancia cada vez que veo electrones formando una figura de intensidad periódica tras haber pasado por un cristal periódico: los períodos de la intensidad no se deben a ninguna transmutación ni manifestación en forma ondulatoria de los corpúsculos electrónicos, sino que su causa física es la propia periodicidad del cristal, según descubrió Duane —que explicó así un experimento físico de modo físico, en vez de apelar a poderes sobrenaturales.

Es cierto que el experimento de difracción, juntamente con la teoría ondulatoria de Schrödinger, *parecía* asestar un golpe fortísimo a la idea de la estructura corpuscular de la materia, pese a las innumerables confirmaciones de tal idea; y en tal situación de perplejidad, el hablar de que la materia poseía precisamente una estructura dual constituyó un consuelo muy apreciado. Sin embargo, el mismo Schrödinger reclamó la coherencia teorética, e intentó formular una *teoría ondulatoria unitaria* de la materia, en la que los corpúsculos eran elevadas crestas de las ondas; por otra parte, Born aplicó a la materia lo que Duane había propuesto para la luz, interpretando las ondas de Schrödinger como referentes a la estadística de los corpúsculos. Y si la interpretación unitaria corpuscular de Born es correcta (cosa que apenas nadie duda), es ilógico excogitar una oposición dualística entre una *cosa,* una partícula y *una* de sus muchas cualidades, a saber: una curva simbólica que representa las expectativas de encontrar una partícula situada aquí o allá (por más que tal curva presente un aspecto ondulatorio). Esta contraposición de incontraponibles ha envuelto a los teóricos cuánticos en contradicciones y en erosiones a la lógica;

por mencionar unos pocos ejemplos: ha conducido a siete interpretaciones distintas (enumeradas en el apartado 42) del símbolo más corriente de la teoría cuántica, la letra ψ, así como a una gratuita reinterpretación de la heisenberguiana incertidumbre predictiva como indeterminación de la existencia, en virtud de haber traducido literalmente las propiedades de la onda al lenguaje corpuscular (véase el apartado 38). Si algunas teorías económicas que hoy se sustentan son, según decía el fallecido presidente Kennedy, «como antiguos discos de microsurco que quedasen de mil novecientos treinta y tantos», lo mismo puede decirse de la teoría ortodoxa de la dualidad.

Algunos teóricos adoptan la postura de que no deberíamos jamás intentar esculpirnos una imagen de las cosas y los eventos microfísicos, sino contentarnos con poseer un método simbólico perfecto para calcular los fenómenos observados. Semejante enfoque, tan formalista, parecía estar justificado en una época en que la intuición de Heisenberg y de Born revisaba la antigua teoría de Bohr de las órbitas electrónicas calculando los datos observados por medio de unas operaciones algebraicas abstractas en un cálculo de matrices hermíticas, cuyo significado físico no era nadie capaz de *entender;* y lo mismo sucedió de nuevo cuando Dirac introdujo un método simbólico aún más enigmático, que, para su propia sorpresa, proporcionó el espín semientero y el momento magnético que se habían observado en el electrón. Con todo, estas audaces aventuras matemáticas se vieron seguidas por la interrogación sobre qué habría de *significar* físicamente todo ello, hasta que se declaró carente de sentido la propia pregunta acerca del sentido de tales métodos abstractos. De modo que, en lugar de alentar la búsqueda de una explicación plausible del método cuántico, se nos dice que basta con tener un modo económico de calcular los fenómenos; y si existe un conflicto entre dos descripciones, una ondulatoria y otra corpuscular, se pretende que ello hace resaltar la lección epistemológica de que no deberíamos preocuparnos por mundo «real» alguno, y que haríamos mejor aceptando la renuncia a ambas imágenes. No es nada extraño que sir James Jeans ([5]), tras haber estudiado a Bohr y a Heisenberg, llegara a la triunfal conclusión siguiente: «La naturaleza consiste en ondas que poseen la cualidad general de ondas de conocimiento, o de falta de conocimiento, en nuestra inteligencia»; con lo que confundía una curva simbólica de aspecto ondulatorio, que pinta las posibilidades que cabe esperar acerca de unos sucesos, con aquello en que consiste la Naturaleza. Más bien estoy de acuerdo con Schrödinger cuando decía: «Hay una manera de pensar que ha logrado gran difusión y que mantiene que no puede existir, en absoluto, una imagen objetiva de la realidad, en el sentido tradicional de este término ... Yo me considero a mí mismo una persona ... que mira semejante opinión como una extravagancia filosófica nacida de la desesperación frente a una grave crisis». También Einstein se oponía a la tesis del

como-si en física; y en seguimiento suyo, continuó mirando los electrones, positones, etc., como las *cosas* de siempre (por más que presenten una forma probabilística de *actuar* inesperada), en vez de tomarlos por unas cosas nuevas llamadas «ondículas»: las partículas siguen siéndolo en virtud de su carga fija, su masa en reposo y su confinamiento en un pequeño volumen, y se puede dar cuenta perfectamente de su *apariencia* ondulatoria en algunos aspectos merced a las reglas cuánticas de la acción mecánica.

Algunos teóricos tienen la sensación de que se les ha desarrollado un instinto infalible para decir cuándo y dónde cambia de manifestación la materia; pero, habiéndome enterado de la regla de Duane, no creo en absoluto en manifestaciones diversas: la teoría corpuscular basta en todos los casos, en tanto que la imagen de las ondas continuas sólo se puede aplicar a la mitad de ellos (no es capaz de dar razón de la acumulación estadística que origina las figuras de difracción). Nadie discute que los granos de la película fotográfica pasan a otro estado debido a corpúsculos electrónicos, pero yo niego enérgicamente que éstos hayan de experimentar un interregno ondulatorio, real o imaginado. La dualidad debe su terca vida sólo a un accidente histórico: al olvido de traspasar a la difracción electrónica la mecánica duaniana de partículas para la difracción de rayos X. ¿Por qué han de seguir desconociendo los teóricos cuánticos la teoría cuántica?

RESUMEN

Indudablemente, sería fútil estudiar

1) la distribución de la energía en el espectro de radiación térmica sin tener en cuenta la regla de Planck sobre el intercambio de energía de los sistemas que oscilen con *período* T ($\Delta E = h/T$), y

2) la mecánica de los átomos sin tener en cuenta la regla de Sommerfeld-Wilson acerca del intercambio de momento angular en sistemas de *periodicidad angular* 2π ($\Delta p_\varphi = h/2\pi$);

pero entonces es igualmente fútil estudiar

3) la mecánica de los cuerpos espacialmente periódicos (cristales) sin tener en cuenta la regla cuántica de Duane sobre el intercambio del impulso lineal en cuerpos con *periodicidad espacial* L ($\Delta p = h/L$).

Si bien las dos primeras reglas se reconocen como la columna vertebral de la teoría atómica, por lo general no se presta la menor atención a la tercera, pese a que constituye la clave para una explicación sencilla y unitaria de los fenómenos de difracción que suelen citarse en favor del aspecto dual de la materia (explicación a base de una pura mecánica de partículas, sin

apelar a ninguna misteriosa manifestación ondulatoria). La declaración de Niels Bohr de que "Los efectos de interferencia que aparecen cuando los electrones pasan a través de cristales son incompatibles con la idea mecánica del movimiento de las partículas" no puede aceptarse a menos que uno cierre los ojos ante la tercera regla cuántica de la mecánica; y tampoco es verdad que las reglas cuánticas representen eslabones de conexión entre la imagen corpuscular y la ondulatoria: las tres reglas anteriores, 1), 2) y 3), sólo se ocupan de la mecánica de partículas, y no de vincular entre sí dos imágenes subjetivas. A partir de Duane y de Born hay que interpretar las apariencias ondulatorias de la materia como resultado estadístico de los mismos corpúsculos que desde hace largo tiempo se venían considerando substrato de todos los fenómenos materiales; y si bien la mecánica de corpúsculos está dominada por ciertas reglas restrictivas, es posible deducir estas reglas cuánticas a partir de unos sencillos postulados no cuantistas, según veremos en capítulos posteriores de este libro. La presente introducción se dedica a mostrar que el fantasma de las apariencias ondulatorias frente a las corpusculares queda anticuado ante la poderosa tercera regla cuántica de la mecánica; por lo cual queda despejado el camino para volver desde las imágenes subjetivas al realismo objetivo que ha guiado el progreso de la ciencia a lo largo de tres siglos. En mi opinión, la escuela de Copenhague parte de una *física equivocada* cuando mantiene que las apariencias ondulatorias, en particular las de la difracción de la materia, se deben a una acción periódica ondulatoria de los electrones: a lo que en realidad se deben es a la estructura periódica de los cuerpos en el espacio (cristales) y en el tiempo (osciladores), merced a las reglas cuánticas acerca de la actividad del momento y de la energía en los cuerpos periódicos.

Capítulo II

Causalidad y azar

"No hay ni causa ni efecto en la naturaleza: la naturaleza no tiene más que una existencia individual; simplemente, es. La recurrencia de casos parecidos tiene sólo lugar en la abstracción que efectuamos con objeto de reproducir mentalmente los hechos."

ERNST MACH.

La mecánica cuántica es una teoría de las vinculaciones probabilísticas entre datos atómicos, obtenidos mediante instrumentos macrofísicos y proyectados con ayuda de la teoría en el dominio microfísico. Por consiguiente, acaso convenga pasar brevemente la mirada sobre el tema de «La causalidad y el azar en la física moderna» (*).

8. El determinismo laplaciano y la causalidad kantiana.

La doctrina laplaciana del *determinismo mecánico universal* mantiene que el mundo en su conjunto marcha como un aparato de relojería, en el que el estado actual está vinculado con todo estado pasado y futuro por una relación inequívoca fija, en virtud de las ecuaciones del movimiento; y un espíritu capaz de abarcarlo todo que mirase el espectáculo del conjunto podría, tras lanzar una breve ojeada actualmente, predecir y posdecir la historia entera del mundo desde el pasado infinito al futuro infinito. En la imagen espaciotemporal de la teoría relativista no «sucede» nada jamás, ya que las líneas universales de todos los puntos dotados de masa estarían fijadas de una vez para siempre; en cambio, el rígido mundo laplaciano se deshace, en verdad, tanto de causas como de efectos, a menos que 'causa' se considere sinónimo de 'antes' y 'efecto' de 'después': *post hoc* y, además, *ante hoc, ergo propter hoc.* Podría decirse, pues, «Se acerca la Navidad porque caen las hojas», de igual modo que «Caen las hojas porque se acerca la Navidad»; y la situación existente hace cinco billones de años era tal que ha determinado todos los accidentes de automóvil de hoy,

(*) Alusión al título de un conocido libro divulgatorio de D. Bohm *(Causality and Chance in Modern Physics*, 1957). *(N. del T.)*

si bien esta última afirmación es empíricamente vacía, porque en el fijo mundo de Laplace no hay resquicio alguno que permita averiguar si ciertas variaciones actuales se verían *siempre* seguidas por las mismas variaciones futuras; y, sobre todo, cualquier variación presente, suponiendo que fuera posible, no sólo tendría que alterar el futuro, sino asimismo el pasado, cosa que constituye una consecuencia harto chocante. Podría argüirse que, puesto que ciertos eventos acontecen hoy, ello hace ver que *estuvieron* condicionados por el estado del mundo hace cinco millones de años; pero lo único que revela tal argumento es que el determinismo laplaciano equipara las sucesiones causales con las temporales.

El determinismo de Laplace guarda relación con el *determinismo lógico,* que declara: lo que es, es; lo que ha sido, ha sido, y lo que ha de ser, será; y no hay nada que pueda cambiar lo que ha de ser en lo que no ha de ser. Pero tampoco esto es ley alguna contrastable de la Naturaleza: es una verdad de Perogrullo.

Otra versión es el *fatalismo,* que mantiene que lo que ha de ser en el futuro será, aunque alteremos lo que ahora es: toda actividad humana actual es fútil; ni los cuidados médicos ni ningunos otros actos humanos pueden hacer cambiar nada: *Che sarà, sarà.* Aun cuando el fatalismo pretende que existe un férreo determinismo, en realidad niega eslabón alguno entre lo que se haga ahora y lo que sucederá más adelante; es algo lleno de incoherencias.

Pese a lo cual, podemos preguntar: ¿Cuál es la fuente de donde procede nuestra tenaz idea de que existe una conexión *necesaria* entre los acontecimientos, a la que denotamos con el nombre de causalidad? A esta pregunta respondió Immanuel Kant del siguiente modo: la idea de una vinculación necesaria o «causal» es la forma, el marco dentro del cual racionalizamos las impresiones sensoriales para llegar a la experiencia: no es parte de la experiencia misma; sostenemos esta idea antes de toda experiencia, *a priori;* y en virtud de su carácter apriorístico, *la idea de la causalidad está inmune frente a la experiencia,* como se refleja en las siguientes frases: «Nunca podré llegar a creer que suceda algo sin causa suficiente; y si no hay una causa visible, tiene que haber una oculta». Esta tesis, que no puede quedar verificada ni falsada por experiencia alguna, resulta enarbolarla todo el mundo, incluyendo quienes apuestan en juegos de azar e incluso los teóricos cuánticos cuando no están de servicio científico.

Cuando los físicos pretenden que «la ciencia moderna ha repudiado a Kant» aluden a ciertas experiencias de los dominios atómicos; tal es la tesis sostenida por Heisenberg [1], el cual ofrece las siguientes «dos respuestas a Kant»: «La primera es: los experimentos nos han convencido de que las leyes de la física cuántica son correctas; pero si lo son, sabemos que no puede encontrarse un

suceso antecedente a modo de causa»; ahora bien, la idea o descubrimiento de Kant es que la causalidad es un juicio *a priori* inherente a nuestra estructura mental, un hecho psicológico, por así decirlo; y, como tal, es independiente de que puedan *encontrarse* o no unas causas concretas: todo «experimento» se apoya de antemano en asumir el supuesto de la causalidad; y el grado específico de causalidad, el que sea lo que los físicos llaman causalidad «individual» o bien la «estadística» (según las teorías actuales), no tiene nada que ver con Kant. En cuanto a la segunda respuesta de Heisenberg a Kant, dice así: «Si quisiéramos saber por qué se había emitido una partícula α en tal instante determinado, tendríamos que conocer la estructura microscópica de la totalidad del mundo, incluidos nosotros mismos, lo cual es imposible. *Por consiguiente,* los argumentos de Kant en favor del carácter *a priori* de la ley de causalidad han dejado de ser válidos». También esto es discutible, en primer lugar, porque no hay experimento ni experiencia que pueda desmontar el argumento apriorístico kantiano; y, segundo, así se hace también cierta violencia a la física: pues con objeto de conocer de antemano el instante de una emisión α, si es que hay *algún* conocimiento que sirva para algo, serviría el de un volumen de 10^{-30} centímetros cúbicos; ¿por qué hablar de la totalidad del mundo? En cuanto a lo de estar «incluidos nosotros mismos» en semejante totalidad, no queda claro si se refiere a nuestros cuerpos físicos, lo cual sería trivial, o si alude a la falacia —véase el capítulo VIII— de que los acontecimientos atómicos, frente a los macrofísicos, sólo se harían efectivamente «reales» al entrar en la conciencia de un observador humano. Parece ser que las «dos respuestas a Kant» de Heisenberg no desmontan el principal dogma de la *Crítica de la razón pura* del gran filósofo, ya que, como lo expresa R. D. Bradley ([2]), «la ausencia de una experiencia de la causalidad no equivale a una experiencia de la ausencia de la causalidad».

La ley de causalidad de que nada sucede sin causa suficiente y necesaria, y, más específicamente, de que «cuando se altera la causa (el presente) queda también alterado el efecto (el futuro)», se convierte en una regla susceptible de contrastación, que podría ser verdadera o falsa al sustituir la totalidad del mundo laplaciano («incluidos nosotros mismos») por una parte del mundo a modo de objeto y un agente exterior que pueda modificar las condiciones externas referentes a aquél a voluntad, estudiar los cambios que se sigan y considerarlos como «efectos» de su propia actividad; y tendría que llevar a cabo tales experimentos repetidamente con vistas a averiguar si se producían o no sucesiones *regulares.* Para eliminar el elemento subjetivo, el observador podría interponer entre sí mismo y el objeto *A* un segundo objeto, *B,* que le serviría de instrumento en interacción con *A* y sería testimonio de los cambios que se produjesen en éste de forma indirecta, preferiblemente amplificándolos; sin

embargo, en este caso el instrumento *B* y el objeto *A* formarían juntamente un objeto más amplio, *(A + B)*, sometido a la influencia del observador; y dentro de *(A + B)* hay una simetría entre causa y efecto: cuando se coloca una chapa caliente debajo de un puchero cabe decir que la chapa es causa de que el agua se caliente; pero con el mismo derecho cabría decir que el agua es causa de que la chapa se enfríe. Sólo en una situación *asimétrica,* cuando se considera al instrumento *B* como extensión del brazo del observador en su exploración del objeto *A,* puede decirse de este acto deliberado que es «causa» de que se produzca un cambio en este objeto; con palabras de Max Black ([3]): «La causa adquiere sólo significado cuando se trata de un acto consciente y voluntario de un sujeto que hace que ocurra algo a un objeto ... Y cualquier cosa que tenga tendencia a hacer ver que el agente no obraba libremente, sino que estaba viéndose constreñido ... haría ver inmediatamente ... que no era él la causa, sino meramente un instrumento o intermediario entre la verdadera causa y sus efectos».

Según esta versión, pues, lo que se quiere decir con causalidad no es una forma apriorística de racionalización, como lo presentaba Kant, sino que se la vincula con nuestra noción de *libre albedrío,* de ser agentes libres que actuamos sobre el no libre resto del mundo (teoría psicofísica algo paradójica, ciertamente). Por desgracia, permite dar dos respuestas contradictorias a la eterna pregunta de si puedo querer querer lo que quiero: a ella respondería yo como sujeto: «Sí, puedo»; mientras que alguien —particularmente un educador o un manipulador de la opinión pública— respondería: «No, no puedes».

9. La causalidad como predecibilidad.

Para el científico, la cuestión de la causalidad se cifra en la pregunta de si a una y la misma preparación antecedente de un sistema finito (en lugar de «la totalidad del mundo, incluidos nosotros mismos») sigue siempre la misma evolución futura; de suerte que, apoyándose en muchas recurrencias, puedan predecirse los sucesos futuros a partir de las situaciones presentes. Mas que ello sea o no siempre posible es una cuestión experimental: la respuesta no ha de depender de nociones apriorísticas ni teorías. Desde luego, la *teoría* clásica es determinista, y la *teoría* cuántica no; pero la experiencia referente a los juegos de azar testimonia en favor de la impredecibilidad —y viene haciéndolo desde mucho antes de la era cuántica.

Veamos el ejemplo de las bolas que caen por un orificio apuntado centralmente al filo de una navaja. Si —o bien, puesto que— las bolas no pueden mantenerse indefinidamente en equilibrio sobre el filo, tendrán que asumir una

decisión asimétrica: unas caerán a la derecha y otras a la izquierda, pese a que la preparación antecedente había sido la misma; de modo que un dispositivo prácticamente simétrico da origen a resultados individualmente asimétricos. No obstante lo cual, un kantiano, para el que la causalidad es una noción apriorística, no renunciará nunca a la idea de las causas suficientes: si no existe asimetría visible la habrá oculta.

Sin embargo, pese a la impredecibilidad de los sucesos futuros en las situaciones estadísticas, es frecuente que se puedan *reconstruir* causas teóricas a partir de los efectos visibles: cuando una bola acaba en la parte de la derecha, pese a haberse apuntado centrada, puede atribuirse el resultado a una corriente invisible de aire, que también es impredecible; y la deflexión de electrones a partir de un cristal, por más que sea impredecible individualmente, se podrá atribuir —y así se hará— a unos impulsos deflectores correspondientes que hayan obrado durante la colisión.

Las tan citadas palabras de Einstein «no puedo creer que el Señor juegue a los dados con el mundo», querían decir que 'azar' sólo expresa una ignorancia momentánea, mientras que en la Naturaleza todo tiene su lugar y está determinado. Mas la creencia en la determinación se encuentra tan más allá del dominio de la física como la creencia opuesta, o sea, la de que la naturaleza es, como tal, indeterminista (según mantienen muchos teóricos cuánticos): ambas son aserciones metafísicas. La observación muestra únicamente que una preparación siempre igual (en la medida en que podamos lograr la igualdad) lleva a resultados distintos, impredecibles, tanto en Montecarlo como en el laboratorio atómico. Es posible elevar esta experiencia general al rango de principio físico, el «principio de incertidumbre»; y el gran mérito de Heisenberg consiste en haber trazado unos límites cuantitativos a la incertidumbre de las predicciones. Pero la incertidumbre como tal era algo que cualquier juego de azar nos enseñaba; y constituía asimismo el trasfondo sobre el que se alzaba la mecánica estadística mucho antes de la edad cuántica. Ahora bien, frente a lo que ocurría con la experiencia precuantista, la *teoría* mecánica clásica era determinista, y en ella no había lugar para el azar; en cambio, en los dominios cuánticos la experiencia y la teoría concuerdan. (Para un estudio claro de este tema véanse R. D. Bradley ([2]) y M. Bunge ([4]), por no nombrar sino un par de autores.)

Teniendo en cuenta la impredecibilidad empírica de los resultados individuales que se obtienen en los juegos de azar, tanto los corrientes como los atómicos, es tanto más notable que haya promedios recurrentes, o sea, valores *medios predecibles,* correspondientes a sucesos individualmente impredecibles; es decir, para los resultados estadísticos rige una especie de causalidad. Tanto en el juego de las bolas y la navaja como en el desdoblamiento de un rayo

de átomos de plata en una rama norte y otra sur, por efecto de un campo magnético (efecto de Stern y Gerlach), se encuentra la proporción 50 : 50, que corresponde a la simetría del dispositivo con respecto a los dos lados. Esta *conformidad entre la simetría geométrica y la estadística* es, en primer lugar, un hecho observado; mas, por otra parte, podría esperársela incluso sin experiencia previa, como algo casi obvio: realmente, mucho más pasmoso sería que no rigiese conformidad alguna, y achacaríamos inmediatamente a una asimetría geométrica (si no visible, oculta) toda asimetría estadística observada. Así pues, surge la cuestión de si la ley de conformidad entre las simetrías geométrica y estadística es, en realidad, empírica o apriorística, o bien de si es acaso una forma de definir una «simetría» a base de la otra. Veamos un ejemplo concreto.

Supongamos que la proporción $d : i$ que se encuentre en el juego de las bolas y la cuchilla resulte ser, persistentemente, 49 : 51. Como hemos indicado antes, nuestra reacción sería decir que el dispositivo de lanzamiento *tiene que* ser ligeramente asimétrico, y que habrá que corregirlo dando una vuelta a algún tornillo. ¿No es esto prueba de que la conformidad entre ambas simetrías no es una ley de la Naturaleza, sino cuestión de *definición* de una de ellas a base de la otra? No lo creo así: la conformidad dicha sigue siendo algo experimentable, por más que se apoye en unos elementos de juicio sólo aproximados; además, incluso en caso de que el aparato esté (aproximadamente) centrado. tres lanzamientos cualesquiera llevan necesariamente a una proporción $d : i$ asimétrica (ya sea 2 : 1, 3 : 0, 0 : 3 ó 1 : 2); y viceversa, aun cuando la correspondiente a mil ensayos sea exactamente 50 : 50, no podemos saber con seguridad si ello no es meramente un accidente feliz pese a un montaje levemente asimétrico. Así pues, llegamos a la conclusión de que, en cuanto *aproximación,* la ley de la conformidad es empírica; y, al mismo tiempo, su *idealización* presenta un carácter de evidencia que la hace apta para *definir* una simetría (exacta) a base de la otra.

Ha habido otras leyes naturales que se han considerado a la vez empíricas y evidentes *a priori,* tales como la «ley» de que todo cuerpo en movimiento acaba por detenerse cuando se lo abandona a sí mismo; y, posteriormente, ha llegado a mirarse la ley newtoniana de la inercia, o sea, la exactamente opuesta a ella, como empírica y al mismo tiempo evidente, si es que no como definición de «estar abandonado a sí mismo».

10. El prodigio de la cooperación estadística.

Los partidarios de la ideología determinista pueden seguir pretendiendo que cada acontecimiento con carácter de d o de i *tiene que* tener su propia causa

asimétrica, ya sea una ligera desviación en el dispositivo apuntador o una pequeñísima perturbación de la bola durante el salto, y que cada una de estas perturbaciones es, a su vez, efecto de una causa anterior. Según tal opinión, pues, un suceso individual de carácter *d* no es sino el miembro terminal de una cadena determinística, *d, ..., d, d, d,* procedente del pasado remoto y predecible por un espíritu laplaciano. Análogamente, la fecha de una defunción podría haberse previsto por un médico ideal, y cada accidente de automóvil no es un accidente, sino que tiene una causa definida, manifiesta u oculta.

La dificultad reside en que la causalidad individual, en vez de resolver la paradoja de la cooperación de las simetrías geométrica y estadística, más bien la agrava; pues las cadenas causales pasan la responsbilidad de la distribución 50 : 50 (que se encuentre en caso de existir aparentemente simetría geométrica) de hoy a ayer, y así sucesivamente hasta un lejano pasado en el que no había simetría geométrica en absoluto, cuando todos los átomos del dispositivo actual de efectuar juegos de azar se encontraban dispersos por todo el globo. De modo que, si nos aferramos a la idea de unas cadenas causales continuas, la conformidad de las dos simetrías que observamos hoy nos conduce a una falta de conformidad en el pasado —a menos que atribuyamos a cada átomo del pasado una increíble previsión o preordenación del papel que habría de desempeñar como miembro de cualquier distribución estadística futura.

Nos encontramos ahora enfrentados con una situación que, desde el punto de vista causal, presenta una paradoja irresoluble, que Bridgman ([3]) ha expresado del modo siguiente: «¿Cómo es posible que los sucesos individuales que suponemos independientes entre sí se combinen para dar un agregado regular a menos que haya un factor que rija su combinación? Pero ¿qué tipo de regimiento puede establecerse sobre sucesos independientes?». Ciertamente, la cooperación de unos sucesos independientes entre sí que lleva a valores medios estadísticos predecibles, así como a fluctuaciones medias (con respecto a aquellos valores medios) asimismo predecibles, unos y otras calculables *a priori* a partir de la simetría geométrica del dispositivo, es nada menos que un prodigio: recordemos que, pese a la simetría del montaje, cada bola o cada átomo ha de decidirse por una vía asimétrica, yendo hacia la derecha o hacia la izquierda; entonces, ¿qué clase de regimiento puede haber que transforme la simetría de los pequeños números en una simetría en los grandes números? No existe una respuesta determinista a estas preguntas: la falta de razones plausibles en favor de la disconformidad de las dos simetrías no es una explicación causal de su conformidad real; y la plausibilidad constituye un argumento sumamente tenue, según testifica la tenaz creencia de muchos profanos que, tras haber salido siete caras seguidas, se sienten inclinados a apostar por cruz más de uno contra uno.

A la vista de este callejón sin salida, los defensores del determinismo se han refugiado, bien en el determinismo endurecido, bien en el suavizado. Todos los deterministas están de acuerdo con Einstein cuando decía: «No puedo creer que el Señor juegue a los dados con el mundo»; y si hubiese añadido: «ni que haya jugado a los dados jamás», hubiera dado una formulación clara y coherente del *determinismo endurecido.* Mas ¿cómo podría dar razón un determinista endurecido del hecho (tan extraño desde el punto de vista del determinismo) de que en todos los casos de distribución estadística, tales como con las moléculas de los gases, los chasquidos de los contadores de Geiger, las gotas de lluvia que caen por metro cuadrado, etc., hay siempre acuerdo entre la observación estadística y la teoría matemática de los procesos aleatorios, tanto en lo que se refiere a distribución media como a las fluctuaciones? ¿No indica esto que al menos *alguna vez* tiene que haberse producido una «mezcla» de condiciones en la que la aleatoriedad predominase? Esto es lo que conceden los deterministas suavizados con su hipótesis del desorden molecular que se habría originado sólo en alguna ocasión hace muchísimo tiempo, y que se habría perpetuado después determinísticamente a través de todas las épocas. Pero si admiten una «verdadera mezcla» de condiciones iniciales en un remoto instante, no hay que dar ningún paso estremecedor para llegar a la concesión del *indeterminismo,* esto es, de que semejante mezcla puede darse también en otros momentos; a saber: siempre que se presente una nueva situación estadística de acuerdo con la teoría matemática de los fenómenos aleatorios, como sucede en los casinos, en la distribución molecular «clásica», en ciertos procesos cuánticos tales como la desintegración radioactiva, etc. Puede recordarse, asimismo, que la cooperación estadística de sucesos independientes entre sí, a la que suele mirarse como algo obvio, fue originariamente un importante descubrimiento empírico de nuestros remotos antepasados, descubrimiento que marcó un importante paso adelante en filosofía natural, que llevó desde la creencia en un mundo caprichoso y hostil a un *cosmos* en el que hasta el dios de los ladrones y los jugadores está obligado a obedecer a unas reglas de juego limpio. Pues ¿qué es el juego limpio en un juego de azar?; es la conformidad entre la simetría geométrica y la estadística: los dados limpios (no cargados) tienen caras iguales, que pretenden correr iguales albures. Sin embargo, por mucho que sea plausible la conformidad de las configuraciones geométrica y estadística, no existe explicación causal de ella. Puede verse una precaria vía de escape de estas dificultades en la siguiente hipótesis del determinismo suavizado:

En una ocasión hubo un *demonio* que inició en el juego de las bolas y la cuchilla dos cadenas causales *d,* luego una *i* y después tres cadenas *d;* tras de lo cual, dándose cuenta de que había dado una preferencia excesiva a las cadedas *d,* inició cuatro cadenas *i* de un tirón, originando así una distribución pseu-

doaleatoria destinada a seducir a los físicos de hoy, apartándolos de la verdadera fe (determinista), y a engañarlos haciendo que acepten la herejía de que el Señor juega a los dados con el mundo, o, al menos, de que en una ocasión, hace mucho tiempo, jugó a los dados. Frente a lo que ocurre con el buen demonio de Maxwell, que convierte el desorden molecular en orden, el demonio que hemos descrito es malo, ya que produce deliberadamente desorden; y para ayudarse en sus malas obras puede incluso utilizar la sucesión de cifras pares e impares del número π (que, en realidad, es tan ordenada que conduce a π, y sólo parece ser aleatoria), o bien el método propuesto por K. Popper ([6]) para construir una sucesión aleatorizada. Sin embargo, la hipótesis de un *deus ex machina* que sirva de excusa del desorden que se nos aparece no es un argumento demasiado bueno para salvar el determinismo.

11. La semejanza entre los juegos de azar ordinarios y cuánticos.

Como hemos visto arriba, la hipótesis de unas causas inobservables y escondidas de la cooperación estadística no deja sitio para una ideología determinista coherente; lo cual es válido en todos los casos de desorden individual que dé lugar a un orden estadístico, tanto con los juegos de dados o de las bolas y la navaja como con la deflexión de átomos por uno u otro camino y la desintegración radiactiva. Por consiguiente, me parece injustificada la pretensión de muchos teóricos cuánticos de que sólo la rama de la ciencia que ellos cultivan (y, en particular, la regla de incertidumbre de Heisenberg) ha derrotado a la doctrina de las cadenas causales ininterrumpidas: si se han convertido al indeterminismo únicamente gracias a la regla de Heisenberg y no han advertido la incoherencia de admitir la hipótesis de las cadenas causales juntamente con la existencia real de distribuciones aleatorias, eso es culpa suya. A mi juicio, *todo* conjunto estadístico demuestra el fracaso de la determinación individual y hace ver que podemos considerar la acausalidad (o la impredecibilidad, utilizando un término subjetivo) como un principio físico autónomo; y a este respecto no hay diferencia real alguna, independientemente de lo que uno piense sobre ello teoréticamente, entre los juegos de azar ordinarios y los atómicos. Piénsese en los dos experimentos paralelos siguientes: 1) una gran cantidad de recipientes, cada uno de los cuales contenga una pequeña bola o una molécula, así como un orificio de salida, y 2) una gran cantidad de átomos de radio, cada uno de los cuales lleve una partícula α; en ambos casos se observa que el número medio de partículas que escapan por segundo decrece exponencialmente; y sería difícil convencer a un observador sin prejuicios de que la salida de las partículas α, regida por las leyes estadísticas de la mecánica

cuántica, habría de poseer una gran importancia filosófica en punto a mostrar una acausalidad irreducible, mientras que no sucedería lo mismo con la salida de corpúsculos de los recipientes. Hace dos generaciones podría haberse visto una diferencia en el hecho de que la tasa de salida de las partículas α parecía ser inmune frente a influencias exteriores, mientras que la de moléculas podría manejarse variando la temperatura y el tamaño del orificio; pero esta diferencia se ha desvanecido una vez que hemos aprendido a machacar átomos en forma regida por leyes estadísticas. Por tanto, soy incapaz de ver por qué sería *esencialmente* diferente la incertidumbre acerca del instante en que se produzca una desintegración atómica de la relativa al instante en que salga una molécula de gas de un recipiente. Bohr atribuye la salida de gas *sólo* a la complejidad de la situación y a nuestra ignorancia de las condiciones iniciales, mientras que considera la salida radiactiva como algo «esencialmente» acausal; ciertamente, no es lo mismo los hechos experimentales y lo que uno piense acerca de ellos: en lo que se refiere a muchas moléculas encerradas en un recipiente o a muchos recipientes cada uno de los cuales contenga una molécula, Bohr piensa de manera determinista, pero en cuanto a la salida de partículas α piensa de manera acausal. Y es esta misma distinción, que carece de apoyo empírico, la que se traza siempre que se dice que «en los juegos de azar ordinarios no sabemos *de hecho,* mientras que en los juegos de azar cuánticos no *podemos* saber»: distinción que no corresponde a diferencia alguna, e ilusoria desde el punto de vista empírico, ya que la teoría determinista es siempre incoherente con el orden estadístico, si excluimos a los demonios.

Aun cuando no es posible efectuar predicciones en los juegos de azar, cabe *reconstruir* lo sucedido en cada caso individual; pero, una vez más, no se encuentra diferencia fundamental alguna entre las situaciones ordinarias y las atómicas: cuando una bola cae a la izquierda de la navaja cabe atribuirlo a un pequeño soplo de viento; y cuando un electrón difractado a través de un cristal sufre una deflexión que lo lleva a un máximo de enésimo orden, es posible achacarlo al correspondiente impulso, $\Delta p = nh/L$, proporcionado por el cristal para que se produzca la deflexión debida. Estas causas hipotéticas individuales se inventan *ad hoc* con fines reconstructivos; pero las causas concretas (¿por qué precisamente nh/L con un n concreto?) conducen a una regresión infinita en ambos casos, tanto los ordinarios como los atómicos. Tal es la razón por la que no puedo estar de acuerdo con Niels Bohr [7] cuando, en su famoso *Debate con Einstein,* escribía: «Tiene la máxima importancia percatarse de que el recurso a las leyes probabilitarias en tales circunstancias [las atómicas] es esencialmente distinto en cuanto a objetivo que la usual aplicación de consideraciones estadísticas como medio práctico de dar cuenta de las propiedades de los sistemas mecánicos de gran complejidad: en realidad, en la teo-

ría cuántica no nos enfrentamos con situaciones intrincadas de tal índole, sino con la incapacidad del marco clásico de conceptos para abarcar los peculiares rasgos de indivisibilidad o individualidad que caracterizan los procesos elementales». En mi opinión, tiene la máxima importancia, por el contrario, darse cuenta de que no hay diferencia esencial alguna entre los fenómenos estadísticos de los juegos de azar ordinarios o en el caso de los gases (suponiendo que entren muchas partículas) y los experimentos atómicos, entre la salida de bolas de una gran caja con un pequeño orificio y la salida de partículas α de un átomo de radio con un «orificio». Quienes han pensado críticamente acerca de la mecánica estadística han encontrado inevitablemente que *siempre* es preciso introducir en la teoría un elemento de desorden, una incertidumbre básica acerca de los sucesos individuales; y la innovación de la teoría cuántica reside en haber fijado unos límites cuantitativos a la incertidumbre de las especiales magnitudes físicas p y q (Heisenberg). Pero es engañoso decir que en los juegos de azar ordinarios y en el caso de los gases, «si quisiéramos, podríamos» restaurar el determinismo, mientras que en los juegos atómicos «no podríamos aunque quisiéramos»; o bien que en el caso de los juegos de azar corrientes hay «accidentes para nosotros», en tanto que en los atómicos hay «accidentes *an sich*». Y cuando P. Bridgman ([5]) hace observar que «las semillas y fuentes de la ineptitud de nuestro pensamiento en el ámbito microscópico se encuentran ya contenidas en nuestro pensar actual en los dominios a gran escala, y deberían haber sido susceptibles de descubrimiento por un análisis suficientemente agudo del modo de pensar del sentido común corriente», estoy enteramente de acuerdo: la idea de abrazar el determinismo en lo que se refiere a los juegos de azar ordinarios, pero no en los atómicos, muestra, ciertamente, una ineptitud del pensamiento; pues el determinismo clásico se encuentra inerme frente a las contingencias estadísticas, y, en contra de lo que pretendía Bohr en la frase que hemos citado más arriba, ya en los días precuánticos se había llegado a darse cuenta de que las causas ocultas hipotéticas no llevan a ninguna parte.

12. El desorden molecular.

La teoría determinista no puede dar razón jamás de las leyes estadísticas sin admitir la no determinista hipótesis de que en cada nuevo juego de azar se presenta un «desorden molecular». Ya los fundadores de la mecánica estadística clásica se habían percatado de ello, pero a veces se olvida, como, por ejemplo, le sucedió incluso a Einstein, al decir, en una correspondencia mantenida con K. Popper ([6]), que «es posible extraer conclusiones estadísticas de

una teoría determinista» (el caso que proponía era una masa puntual girando con velocidad constante a lo largo de una circunferencia dividida en mitad izquierda y derecha): es cierto que el *valor medio de los tiempos d : i* (*) es 50 : 50, según la teoría determinista, pero Popper tiene razón al decir que no hay razones deterministas por las que hubiera de encontrarse una razón *media estadística* de 50 : 50 en una serie de observaciones a menos que se apoye uno en la hipótesis complementaria del «desorden molecular», que en este caso se aplicaría a los instantes de observación; así pues, el resultado estadístico no se deduce de una teoría determinista, sino del supuesto de que los instantes de observación presenten una simetría estadística. Lo mismo sucede en situaciones más complejas: con masas gaseosas que comprendan muchos átomos, el teorema ergódico nos permite calcular promedios espaciales en un instante y promedios temporales en un punto; pero no hay razón determinista alguna por la que los valores medios sobre el espacio y el tiempo continuos hubieran de coincidir con los promedios obtenidos a base de instantes y puntos elegidos aleatoriamente; y la apelación a la hipótesis del desorden molecular no es más que una petición de principio.

Puesto que estas consideraciones se aplican a los juegos de dados y a los gases tanto como a los juegos azarosos cuánticos, no es fácil ver que tenga mucho sentido una demostración suplementaria de que los sucesos cuánticos en el campo de las dimensiones atómicas poseen un carácter irreducible de incertidumbre, o de que el formalismo de la *teoría* cuántica exige una interpretación no determinista. Todo formalismo puede interpretarse siempre de diversas maneras, y la demostración de Von Neumann ([8]) en contrario es circular, como han hecho ver De Broglie ([9]) y Feyerabend ([10]), por lo cual carece de valor. Pero igualmente es engañoso creer que la refutación de la demostración de Von Neumann ha vuelto a abrir la vía del determinismo a la física cuántica: no hay situación estadística que quepa reducir jamás al determinismo, salvo en caso de que uno crea en un *deus ex machina* que en algún momento remotísimo habría introducido el desorden estadístico, que se habría transmitido luego determinísticamente al presente y al futuro. En ello estamos de acuerdo con Charles S. Peirce ([11]), que en 1892, mucho antes de la era cuántica, replicaba así a un determinista suavizado en *The Doctrine of Necessity Examined [Examen de la doctrina de la necesidad]:* «Usted cree que todas las especificaciones arbitrarias del universo se introdujeron en una sola dosis al principio, supo-

(*) Esto es, el valor medio de la razón entre el tiempo durante el cual el punto circule por la parte derecha de la circunferencia y el tiempo durante el que circule por la izquierda; razón que es constantemente igual a 50 : 50 para todo número de circuitos completos, naturalmente. *(N. del T.)*

niendo que haya habido un principio; mas, por mi parte, yo creo que la diversificación, la especificación, está teniendo lugar continuamente». Para una evaluación reciente de las contradicciones internas de la doctrina determinista consúltese K. R. Popper, «Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics» *[El indeterminismo en la física cuántica y en la clásica]* ([12]); véase también *Determinism and Freedom in the Age of Modern Science, a Philosophical Symposium [Determinismo y libertad en la Edad de la ciencia moderna: un simposio filosófico]* ([13]).

RESUMEN

Frente a lo que sucede en la doctrina laplaciana del determinismo universal, que es puramente académica, y con la causalidad kantiana como forma apriorística de racionalización, el físico habla de causalidad cuando el estado *A* de un objeto (al que se haya preparado con frecuencia de la misma manera) se ve siempre seguido por el mismo estado *B*, de modo que se pueda *predecir* que *B* seguirá a *A* también en los experimentos que se hagan en el futuro. Pero el que esto se cumpla en todos los casos es cuestión experimental; y cualquier juego de azar lo refuta: hay ocasiones en que a *A* lo sigue *B*, pero otras lo hacen *B'* o B''.

Los diferentes efectos, *B*, *B'*, *B''*, que siguen a una preparación *idéntica* de *A* (en la medida en que tal cosa sea posible prácticamente), aparecen de acuerdo con unas razones estadísticas (prácticamente) fijas; y en el caso particular de que el dispositivo de jugar presente una simetría geométrica, también se observa una simetría estadística. Esta *conformidad* entre las simetrías geométrica y estadística es: *a)* un hecho empírico, y, por ello, sólo aproximadamente confirmable; *b)* algo esperabie, como idealización exacta, previamente a toda experiencia, y *c)* un criterio de definición de la simetría geométrica a base de la estadística, o viceversa.

La observación general de la *cooperación estadística* de sucesos individuales para formar configuraciones estadísticas quebranta en principio la idea determinista; y las causas ocultas individuales lo único que hacen es pasar la responsabilidad de la cooperación estadística de hoy a ayer, y así sucesivamente en una regresión infinita. En el mejor de los casos, la causalidad individual sólo podría salvarse mediante el "tremedal del determinismo suavizado", según el cual podría suponerse que un *demonio* había producido una distribución pseudoaleatoria en algún momento remoto; y lo mismo supone, esencialmente, la expresión 'desorden molecular', la cual, simplemente, comete una petición de principio. Así pues, es preciso aceptar la impredecibi-

lidad (también llamada acausalidad de los sucesos individuales) como una característica irreducible de la ciencia natural; la teoría cuántica no ha contribuido a la formación de esta idea en general, pero ha trazado unos límites cuantitativos definidos de incertidumbre para el caso de los juegos de azar atómicos. Por otra parte, la impredecibilidad de los sucesos futuros no impide la *reconstrucción* de causas individuales fundamentada en la teoría determinista.

CAPÍTULO III

La continuidad y los saltos cuánticos

"Cuando los casos se aproximan uno a otro continuamente, y por fin se funden entre sí, los acontecimientos de la sucesión hacen lo mismo."

LEIBNIZ.

13. LAS LEYES ESTADÍSTICAS Y EL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD.

Hemos visto en el capítulo anterior que sobre una base determinista no puede *jamás* entenderse el fundamental hecho de que unos sucesos independientes cooperen para formar configuraciones estadísticas, ya sean macroscópicas o atómicas. Por consiguiente, la pretensión de que sólo la experiencia cuántica habría desacreditado al determinismo es injustificada. Acaso tenga interés, sin embargo, saber que existe otro principio —enteramente precuantista— a partir del cual puede deducirse la aparición de distribuciones estadísticas como consecuencia necesaria: nos referimos al principio de la *continuidad de la causa y el efecto,* enunciado primeramente por Leibniz con las palabras que hemos elegido como lema de este capítulo (o bien, dicho según se habla modernamente: «Un cambio infinitesimal de la causa no produce nunca un cambio total del efecto»). Vamos a citar el propio ejemplo de Leibniz, que le sirvió para corregir una imposible especulación de Descartes referente a la cinemática del choque elástico. Según Descartes, cuando dos bolas chocan con velocidades iguales pero opuestas, tras la colisión ambas prosiguen su ruta en la dirección seguida por la más pesada; pero si las dos pesan lo mismo rebotarán en direcciones opuestas. Para Leibniz, las cosas no pueden ser así, ya que se violaría el principio de continuidad: tiene que haber un cambio *gradual* de las velocidades y direcciones finales cuando los pesos de las dos bolas se vayan haciendo gradualmente más parecidos, y, en particular, cuando los pesos sean *casi* iguales, las velocidades finales tienen que ser *casi* iguales y opuestas, en lugar de seguir ambas la dirección que inicialmente llevase la bola más pesada.

Apliquemos ahora el principio de continuidad a nuestro juego de las bolas y la navaja. Cuando se apunta formando un ángulo considerable a la derecha, α, todas las bolas caen a la derecha del filo, y lo mismo sucede con la izquierda:

en lugar de un juego de azar tenemos certidumbre. Pero imaginemos que el dispositivo físico con que se apunte vaya pasando de derecha a izquierda en forma gradual; mirando las cosas desde un punto de vista idealizado podría esperarse que en el momento en que el ángulo α pasara por cero se produciría un cambio abrupto de tener sólo bolas *d* a sólo bolas *i*, o sea, que la relación *d : i* se transformaría de 100 : 0 en 0 : 100; sin embargo, el principio general de continuidad nos dice que eso no puede suceder, y que en lugar suyo lo que hemos de esperar es un cambio gradual de la relación 100 : 0 a la 0 : 100 cuando el dispositivo físico de apuntar se desplace gradualmente a través de un intervalo pequeño pero *finito*, $\Delta\alpha$, en torno de $\alpha = 0$. Y ¿qué pueden ser estos valores intermedios de la relación sino relaciones *estadísticas*, ya que cada una de las bolas sólo puede caer o a la izquierda o a la derecha de la navaja? Dentro del intervalo $\Delta\alpha$, pues, no puede haber certeza con respecto al resultado que se vaya a obtener: tiene que ser un juego de azar. Vemos ahora que cabe considerar la *distribución estadística*, con valores de la relación intermedios entre 100 : 0 y 0 : 100, como *consecuencia racional del principio de la continuidad de la causa y el efecto;* y, una vez más, no hay diferencia alguna entre los juegos de azar ordinarios y los atómicos: en uno y otro caso la continuidad exige que el mismo montaje, si en cuanto causa lleva a diversos sucesos como efectos, dé lugar a unas relaciones estadísticamente ordenadas [véase la crítica de V. Hinshaw ([3])].

Parecen encontrarse contradicciones de la continuidad en el comportamiento térmico de las sustancias que cuando se varía infinitesimalmente la temperatura cambian abruptamente de estado de agregación, según se cree. Sin embargo, aun cuando ello pueda ser cierto según la teoría idealizada, en realidad el cambio tiene lugar dentro de un intervalo último, ΔT, alrededor de la temperatura T; y es significativo que dentro de dicho intervalo se produzcan fluctuaciones estadísticamente regidas.

La estrecha vinculación de la continuidad general de la causa y el efecto, por un lado, y los sucesos individualmente impredecibles, «acausales», aun cuando estadísticamente ordenados, por otro, no sólo debería ofrecer interés para el físico, sino igualmente para el filósofo de la ciencia, pues, como acabamos de ver, el principio de continuidad nos otorga *razón suficiente de la falta de una causación suficiente;* y además, las proféticas palabras de Leibniz, cuando decía: «Para mí, el principio de continuidad está fuera de duda, y podría ser útil para asentar varias importantes verdades en una genuina filosofía [= ciencia] que se eleve por encima de la imaginación, buscando el origen de los fenómenos en las regiones intelectuales», están vindicadas por la posibilidad de edificar la moderna mecánica cuántica sobre la base de este principio, como acaso hagan ver los apartados que siguen.

14. La separación de los estados atómicos.

Supongamos que muchos átomos de la misma especie se encuentren en el mismo estado, A, es decir, que todos ellos hayan reaccionado en sentido positivo a cierto instrumento selectivo que defina el estado A; y llamemos a este instrumento filtro de pasa A, o, más brevemente, filtro A.

Siempre que se envíen de nuevo los átomos en estado A a un filtro A, lo volverán a pasar (fig. 2a). Sin embargo, esa misma clase de átomos puede poseer también otros estados, $\overline{A}$, que se vean repelidos por el filtro A; vamos a denotar que son estados enteramente distintos de A escribiendo $\overline{A} \neq A$, y supongamos también que sean separables del estado A mediante el filtro de pasa A (y de no pasa $\overline{A}$) (fig. 2b). Por ejemplo, si A denota el estado de los

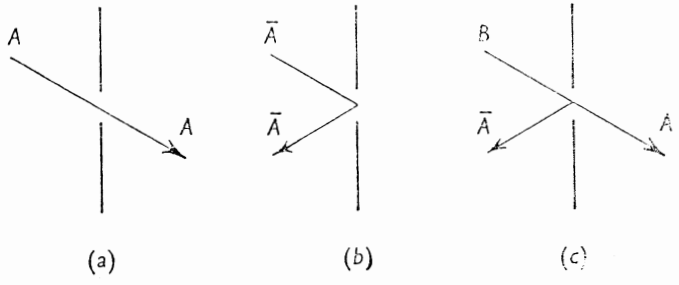

Figura 2, a, b y c

átomos de plata con orientación del espín ↑, la orientación opuesta, ↓, corresponderá a un estado $\overline{A} \neq A$; y, análogamente, los dos estados de orientaciones respectivas ↗ y ↙ son separables por medio de un campo de Stern-Gerlach de dirección ⇝, que caracterizará a los estados ↗ y ↙ de los átomos de plata como totalmente diferentes, separables o «mutuamente ortogonales» (en la terminología cuántica). Dos estados de energía distintos cualesquiera son totalmente diferentes, «mutuamente ortogonales» y separables por medio de un «filtro de energía» de algún tipo (si bien estamos idealizando, naturalmente) (*).

(*) Ante la observación de que defino aquí «filtro» por referencia a unos «estados» y éstos por referencia a aquél, he de decir lo siguiente: las estructuras teoréticas operan con símbolos matemáticos y verbales desprovistos de contenido específico, que pueden luego vincularse con un «modelo» o contrapartida física; la clasificación de «estados» que hacemos aquí puede ejemplificarse en la física cuántica por los «estados de posición en un instante dado», por los «estados energéticos», etc., pero no, en modo alguno, por estados de salud o de conocimiento de un observador; y la estructura formal puede establecerse sin

Teniendo en cuenta el principio de continuidad, es de esperar (y la experiencia, ciertamente, lo confirma) que exista una tercera clase de estados intermedia entre A y $\bar{A}$, entre los que siempre pasan y los que nunca pasan: a saber, los estados B, que en ocasiones pasen el filtro de pasa A y en otras sean repelidos por él (fig. 2c). No es posible considerar estos estados ni como iguales a A ni como enteramente desiguales a él (o sea, ni como separables de A al 100 por 100); por lo que vamos a denotarlos como «parcialmente iguales» a A, cosa que escribiremos así: $B \sim A$. Y vamos a definir el *grado parcial de igualdad* entre A y B como la *parte que pase* estadísticamente, de los átomos en estado B, a través de un filtro A; sin embargo, como el concepto de igualdad es mutuo o recíproco (¿qué gemelo es más igual al otro?), esta definición de la igualdad parcial sólo tiene sentido si los átomos en estado B pasan los filtros A con la misma probabilidad con que los que estén en estado A pasen los filtros B. Este *postulado de simetría,* que se escribe

$$P(B \to A) = P(A \to B),$$

es absolutamente fundamental para la métrica probabilitaria que vamos a formular más adelante (en el capítulo VI), y es sumamente plausible, ya que constituye el equivalente estadístico de la *reversibilidad* de los procesos de la mecánica clásica; por lo demás, la simetría de P es decisiva en mecánica cuántica.

Los fenómenos representados en la figura 2c son los que el físico conoce con el nombre de *efecto de desdoblamiento,* en un sentido general; y tenemos un ejemplo en la división de Stern y Gerlach de un rayo incidente de partículas magnéticas en dos rayos deflectados por medio de un campo magnético. También empleamos la palabra «filtro» en un sentido muy general, para referirnos a cualquier instrumento ideado para distinguir (esto es, separar) un estado, A, de otro estado, $\bar{A}$, completamente diferente a él: por ejemplo, una vara de medir con una marca en el lugar de coordenada q juntamente con un reloj en el que se lea el instante t es un filtro (q, t), ya que indica si una partícula que se desplace a lo largo de la vara está o no en el lugar q en el instante t; y si la vara está graduada con una serie de marcas, $q_1, q_2, \ldots$, es un *separador*, que distingue entre varios estados de posición mutuamente excluyentes —a los que se llama «mutuamente ortogonales»— en un instante dado, t. Un prisma de Nicol es un *filtro* para un estado de polarización determinado, y un cristal con doble refracción es un *separador* para dos estados mutuamente excluyentes de la polarización de «fotones» (si es que se cree en éstos).

---

que haya que referirse siempre a experimentos conocidos, de igual modo que el geómetra aplica el concepto de punto y el de línea recta sin tener que dar siempre una definición operacional de estos términos.

Volvamos a la cuestión de las cadenas causales. Si tuviésemos que ocuparnos únicamente de sucesos pertenecientes a *una* población estadística, podría admitirse la hipótesis de la existencia de causas ocultas de los sucesos individuales; y la razón por la que la mayoría de los teóricos (incluido yo mismo) prefieren hablar de *acausalidad* es la frecuente aparición de diversas contingencias estadísticas sucesivas. Supongamos, en efecto, que los átomos B que hayan pasado tenían ciertas causas ocultas para pasar el filtro A, y que los repelidos las tenían para serlo; es decir, supongamos que los átomos incidentes estaban, en realidad, distribuidos en dos estados distintos, B_A y $B_{\bar{A}}$, predestinados, respectivamente, a pasar y ser repelidos por el filtro A; en tal caso, el filtro A constituiría el medio más conveniente de sacar a luz la oculta diferencia entre B_A y $B_{\bar{A}}$. Supongamos ahora que se ensayen las partículas B_A, que habrán pasado, mediante otro filtro, C: éste las dividirá de nuevo en una fracción que pase y otra que quede bloqueada; mas, según la hipótesis de las causas ocultas, ello revelaría que tampoco es uniforme el estado B_A, sino que consta del estado B_{AC} y el $B_{A\bar{C}}$ en una relación estadística definida (de los cuales el primero pasaría un filtro C y el segundo sería rechazado por él). Continuando de esta forma se hace evidente que la hipótesis de las causas ocultas nos pediría que creyésemos, *primero,* que cada uno de los átomos está predestinado a presentar una reacción determinada ante cada posible ensayo futuro con un filtro, y *segundo,* que los destinos de los diversos átomos están coordinados entre sí de tal modo que nos presenten unas relaciones estadísticas determinadas (más las fluctuaciones gaussianas) entre los números correspondientes a los que hayan pasado y a los que hayan quedado bloqueados, todo ello en armonía con la teoría matemática de errores; lo cual exigiría una previsión de alcance verdaderamente fantástico, un fraude gigantesco montado por un mal demonio dedicado a fingir la existencia de aleatoriedad donde habría un orden oculto. *No se necesita la demostración de Von Neumann* para ver que ante una distribución estadística cualquiera, cuantista o precuantista, las cadenas causales no llevan a ninguna parte; cosa que debería expulsar toda esperanza de restaurar la causalidad individual a un nivel más profundo, subcuántico.

15. Reproducibilidad y saltos cuánticos.

Cuando de entre 100 partículas incidentes, en estado B, 70 pasan un filtro A y 30 quedan rechazadas, es fútil buscar diferencias en los estados B (que acaso podrían denotarse mediante B_A y $B_{\bar{A}}$), o sea, preguntar por el *porqué* de la diferencia de los comportamientos. Cabe preguntar, sin embargo, *cómo* se las arreglan las 70 partículas para pasar a través de un filtro construido para que

pase el 100 por 100 de las partículas en estado A y no se vea rechazada ninguna. Podemos hallar la respuesta sin más que someter a las 70 partículas dichas al ensayo de pasar por otro filtro A: lo pasarán sin excepción. De este resultado experimental («lo que pasa una vez, pasa siempre» y, análogamente, «lo que se rechaza una vez, se rechaza siempre») puede sacarse la conclusión de que las 70 partículas incidentes en estado B que habían pasado el primer filtro A tienen que haber sufrido un cambio, tienen que haber «saltado» de su estado original, el B, al nuevo estado A; y, análogamente, las rechazadas por el primer filtro A, y luego por el segundo, tienen que haber saltado del estado B al $\bar{A}$ (como se indica en las partes correspondientes a lo que pasa y lo que se rechaza en la fig. 2c). Y de modo semejante ocurre cuando se vale uno de la teoría corpuscular de la luz: un fotón que haya pasado un prisma de Nicol una vez volverá a pasar otro prisma de Nicol paralelo al primero, con toda seguridad; por consiguiente, en el acto de pasar el primer prisma tiene que haber adquirido un estado de polarización paralelo a los dos. El resultado experimental de que «lo que pasa una vez, pasa siempre» y «lo que se rechaza una vez, se rechaza siempre», o sea, la *reproducibilidad del resultado de un ensayo,* lleva inmediatamente a una característica cuántica típica, esto es, al *salto* del estado original, B, a un nuevo estado (ya sea A o $\bar{A}$) durante el ensayo efectuado con un filtro A, con las *probabilidades de transición* respectivas $P(B \rightarrow A)$ y $P(B \rightarrow \bar{A})$; por tanto, podemos considerar que semejantes saltos impredecibles son consecuencia de la elemental experiencia general de la reproducibilidad, sin necesidad de apoyarse en ningún supuesto cuántico especial. Y viceversa, solamente podrá decirse que A, B y C son «estados» para la teoría cuando satisfagan el requisito de simetría de P y el de reproducibilidad.

La mecánica *estadística* clásica se basa en el supuesto tácito de que hubo una vez un momento en que se estableció una distribución aleatoria (¿gracias a un demonio?), y de que los sucesos están determinados solamente a partir de aquel instante; la teoría cuántica, en cambio, mantiene que todo ensayo conlleva una nueva distribución estadística. Vamos a hacer intuitiva la diferencia entre uno y otro puntos de vista con el ejemplo que sigue.

Imaginemos un gran número, N, de flechas distribuidas al azar en un círculo formando radios, y supongamos que se mira esta «estrella» de flechas a través de un cristal circular, A, dividido en tres sectores iguales, A_1, A_2 y A_3. Por las condiciones supuestas, la probabilidad de encontrar una flecha determinada dentro de cada una de las partes A_1, A_2 y A_3 es igual a un tercio en los tres casos. Las predicciones estadísticas que se hagan en este juego de azar y en los semejantes a él se basan en la aleatoria distribución inicial de las flechas por todas las direcciones; predicciones que pueden quedar confirmadas sin más que *mirar*

las flechas, cosa que no afectará el estado de ninguna de éstas. Tal es la situación clásica.

Si se sustituyen las N flechas macroscópicas por microflechas que representen las direcciones de los espines de los átomos de *Ag*, ni siquiera un demonio podría distribuirlas simultáneamente por todas las direcciones de un círculo: pues las flechas espínicas sólo pueden situarse haciéndolas pasar por un «filtro» lineal, por ejemplo, un campo magnético mantenido en cierta dirección, del cual emergerán los espines aleatoriamente en dos direcciones opuestas (paralelas y antiparalelas al campo). Cuando el campo magnético se mantiene en la dirección N-S, los *átomos de Ag* alinean los espines únicamente en las direcciones N y S; y cuando se los somete a ensayo en un segundo campo, éste de dirección NE-SW, se obliga a *saltar* a cada espín desde su situación original (ya fuese N o S) o bien a la dirección NE o a la SW. Para cada espín individual es una cuestión de azar el que salte a una u otra de estas últimas, de modo que sólo la frecuencia media de los distintos saltos tendrá unos valores determinados (que serán iguales a los cosenos cuadrados de los ángulos que formen la dirección inicial y la final). Así pues, el instrumento macroscópico de ensayo desempeña en el presente ejemplo del campo magnético un papel activo, ya que contribuye a obligar a las partículas que se ensayan a que salten de la dirección original que tuviesen a una de las dos direcciones características de tal campo; si bien por principio es impredecible con cuál de las dos direcciones se alineará una partícula individual. Análogamente, cuando un aparato medidor de posición ha situado una partícula en cierto punto de coordenada q, o dentro de cierto pequeño intervalo δq, y cuando a esta observación le sigue un ensayo del momento de la partícula, es impredecible qué momento, p, resultará tener: no hay dispositivo experimental que permita situar una partícula en forma predecible en un estado dotado de una posición y un momento definidos simultáneamente (Heisenberg); cuanto más pequeño sea el margen de localización, δq, mayor será la incertidumbre del momento adquirido en el acto de situarla, p. Esto no nos impide, sin embargo, que, a partir de la deflexión observada en la partícula, *reconstruyamos* después el momento adquirido por ella con una precisión que sobrepase con mucho la del intervalo de predicción, $\delta p \approx h/\delta q$; y puesto que toda medición implica siempre una reconstrucción de lo ocurrido, es injustificado sostener que la regla de Heisenberg se refiere a la imposibilidad de medir simultáneamente con exactitud una pareja qp: lo único que sucede es que no es posible preparar ni predecir el resultado de una medición. (Veremos más cosas acerca de esto en el apartado 37.)

Se ha sostenido a propósito de estos hechos, primeramente por Reichenbach ([2]), que nos encontramos así frente a una nueva situación lógica: además de la contraposición entre sí (ha pasado) y no (se ha rechazado), habría un

tercer caso: indeterminado; y Reichenbach ha construido incluso un esquema de una lógica trivalente. A mi juicio, con ello se asienta una nueva contraposición de incontraponibles; pues el sí y el no se refieren a hechos, en tanto que el indeterminado se refiere a lo que se pueda *pensar* acerca de unos hechos futuros, que resultarán ser sí o no. *Anomalía causal no es anomalía lógica:* por el contrario, el postulado de la continuidad de la causa y el efecto anticipa la aparición de sucesos acausales regidos por leyes estadísticas; y la aparente paradoja de que el postulado de la *continuidad* juntamente con el de la reproducibilidad exijan que haya saltos *discontinuos* de estado a estado (de B a A o a $\overline{A}$: fig. 2c) desaparece al percatarse de que estas transiciones discontinuas de un estado a otro que se producen en los ensayos están regidas por el azar, y no por unas relaciones entre causa y efecto. Así pues, vemos que la continuidad macroscópica entre la causa y el efecto entraña una discontinuidad microscópica acausal.

Con objeto de entender la teoría cuántica, es conveniente empezar por un análisis de experimentos tan simples como el efecto de desdoblamiento, en lugar de partir de la ley de Planck $E = h\nu$, que constituye una consecuencia remota de diversos postulados elementales juntos. El desarrollo histórico, que extrajo su ímpetu de unas discrepancias espectaculares entre los hechos microfísicos y las expectativas clásicas, en vez de hacerlo de un análisis crítico de la ineptitud del pensamiento determinista clásico acerca de los juegos de azar «ordinarios», ha obstruido el paso a un enfoque simple y directo de las intrincadas peculiaridades de la mecánica cuántica: con la sola excepción del principio de correspondencia de Bohr, siempre se ha subrayado lo espectacular y revolucionario; y así había de ser para justificar la ruptura con la tradición cartesiana. Por fin pareció concentrarse todo en la ecuación de Schrödinger, actualmente colocada a las puertas de ingreso a la teoría cuántica; pero ello es como comenzar el estudio de la mecánica por $E = mc^2$ en lugar de hacerlo ocupándose de la caída de manzanas y de la oscilación de lámparas, o el del electromagnetismo por las ecuaciones de campo de Maxwell en vez de por la ley de Coulomb: los intrincados desarrollos que involucran unas funciones imaginarias complejas, las funciones ψ, de coordenadas periódicas, y unos momentos que responden a $p = h/\lambda$ y $E = h\nu$, deberían encontrarse al final de la exposición teorética, no al comienzo. Por ello he invertido el camino usual de acercamiento a las cuestiones: nuestra primera preocupación será formular el esquema general de la vinculación entre probabilidades; y dejaremos para el capítulo VII las aplicaciones especiales a los observables conjugados q y p, en donde expondremos los rasgos de la dinámica cuántica, con su aspecto ondulatorio y dominada por h.

RESUMEN

El principio de la continuidad de la causa y el efecto, primeramente enunciado por Leibniz, puede ser aplicado a situaciones que degeneren en "juegos de azar" cuando entre las dos reacciones —siempre A y siempre $\overline{A}$ (que significa no A)— se encuentre, a modo de puente, la aparición en ocasiones de A y en otras de $\overline{A}$, de acuerdo con una relación estadística situada entre los casos límites del 100 por 100 (siempre A) y el 0 por 100 (siempre $\overline{A}$). Cuando se someten a ensayo los "estados" de un sistema por medio de filtros —en el sentido más general de este término—, se tiene un juego de azar especial: si un filtro que deja pasar el estado B rechaza siempre al estado A, éste será enteramente diferente de B (cosa que escribiremos así: $A \dashv B$); y si el filtro A deja pasar siempre el estado B, tendremos $A = B$; pero, de acuerdo con el principio de continuidad, tiene que haber casos intermedios de *igualdad parcial* entre A y B (que escribiremos $A \sim B$), en los que las partículas en estado B unas veces queden rechazadas por un filtro de pasa A y otras veces lo pasen. La parte o fracción de partículas B que pasen el filtro A, $P(A \rightarrow B)$, podrá tomarse como definición cuantitativa del grado de igualdad entre los estados A y B; definición que tiene sentido únicamente cuando $P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$ y cuando los "estados" se definen de tal modo que encajen en este esquema de fracciones simétricas de paso.

Si se introduce el postulado de reproducibilidad de los ensayos, las fracciones de paso se convierten en las *probabilidades de transición* (de A a B, y viceversa) de los ensayos. El principio de continuidad de la causa y el efecto para valores medios, simbolizado por la relación de la igualdad parcial $A \sim B$, proporciona una razón suficiente de la ausencia de causas suficientes de las elecciones individuales de sucesos pertenecientes a una población estadística; y puede considerarse que la acausalidad —esto es, la impredecibilidad individual— microfísica se sigue del principio de la continuidad de la causa y el efecto en el dominio macroscópico, tal y como está ejemplificado en el efecto estadístico de un cambio continuo del dispositivo de apuntar del juego de las bolas y la navaja.

CAPÍTULO IV

Las probabilidades de transición

"La estructura del sistema es obra de la razón; pero los contenidos empíricos y sus relaciones mutuas tienen que quedar representados en las conclusiones de la teoría."

EINSTEIN.

16. LA SIMETRÍA BILATERAL.

En el capítulo anterior nos hemos ocupado de la relación existente entre *un par* únicamente de estados, *A* y *B*, en los tres casos de igualdad, desigualdad e igualdad parcial. Podemos aplicar ahora unas consideraciones análogas a *todos* los estados de un objeto microfísico ([1]).

Cabe someter a ensayo la posición de un átomo dado en cierto instante, *(q, t)*, luego su energía, *E*, su momento eléctrico y otras magnitudes observables (que denotaremos, en general, con *A, B, C,* y así sucesivamente): bastará someterlo al escrutinio de un medidor de *A*, de un medidor de *B*, etc. El medidor de *A* revelará que el átomo se encuentra en *uno* de los diversos estados posibles $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_M$ *(M* recibe el nombre de *multiplicidad* de los estados *A);* y, análogamente, cuando se lo someta a ensayo mediante un medidor de *B*, el átomo podrá mostrar un número finito de valores, $B_1, B_2, \ldots, B_N$. Todo ello es enteramente trivial.

Dista mucho de ser trivial, sin embargo, la experiencia de que existen ciertas propiedades, a las que se llama *observables* en el restringido sentido de que se encuentran vinculadas entre sí, del modo que vamos a explicar a continuación, por unas *relaciones probabilísticas* definidas. Supongamos que el átomo, sometido a ensayo con un medidor de *A*, haya presentado un estado determinado, A_k; cuando se lo someta luego a ensayo con un medidor de *B* podrá aparecer uno cualquiera de los estados $B_1, B_2, \ldots, B_N$, sin que haya posibilidad de predecir el resultado de un ensayo determinado de la magnitud *B;* no obstante lo cual, una serie de ensayos que partan siempre del mismo estado inicial, A_k (previamente averiguado mediante un medidor de *A),* podrá dar lugar a los distintos estados *B* de acuerdo con una distribución estadística dotada de unas

frecuencias relativas —o probabilidades— definidas, $P(A_k \rightarrow B_j)$, cuya suma será la unidad:

$$\Sigma_j P(A_k \rightarrow B_j) = 1 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, M. \tag{1}$$

Supongamos ahora que el átomo que estaba inicialmente en el estado A_k muestra un estado B_j cuando se lo somete a un ensayo B, y que a continuación se lo somete de nuevo a un ensayo relativo a A, resultando ahora que ha perdido todo «recuerdo» de su estado original, A_k: en vez de guardarlo, una serie de ensayos de A aplicados al estado B_j daría origen, con independencia de la historia anterior, a diversos estados A en una distribución estadística definida, dotada de las probabilidades $P(B_j \rightarrow A_k)$, cuya suma sería igual a la unidad:

$$\Sigma_k P(B_j \rightarrow A_k) = 1 \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1'}$$

Se pueden reunir las probabilidades de transición, P, que llevan de estados iniciales A a estados finales B en una tabla o «matriz» rectangular de M filas y N columnas:

$$\begin{pmatrix} P(A_1 \rightarrow B_1) & \ldots & P(A_1 \rightarrow B_N) \\ \ldots & & \ldots \\ P(A_M \rightarrow B_1) & \ldots & P(A_M \rightarrow B_N) \end{pmatrix} = (P_{\overrightarrow{AB}}). \tag{2}$$

En ella, la suma de todos los elementos de cada fila valdrá la *unidad*, de acuerdo con (1). Y pueden construirse igualmente otras tablas o matrices semejantes, correspondientes a otras series estadísticas de ensayos, que nos proporcionarán las matrices $(P_{\overrightarrow{BA}})$, $(P_{\overrightarrow{AC}})$, $(P_{\overrightarrow{CA}})$, etc.; en todas ellas la suma de los elementos de cada fila sumará siempre la unidad.

Se obtiene un caso especial al aplicar el mismo medidor dos veces seguidas. Cuando el ensayo con un medidor de A ha indicado que un átomo se encuentra en el estado A_k y se aplica de nuevo el ensayo A, se encontrará de nuevo el mismo resultado anterior, A_k, con toda seguridad, esto es, con probabilidad *unidad*. Por consiguiente, tendremos:

$$P(A_k \rightarrow A_{k'}) = \delta_{kk'} = \begin{matrix} 1 \text{ para } k = k' \\ 0 \text{ para } k \neq k' \end{matrix} \tag{3}$$

Parece haber un contraejemplo, sin embargo, en el caso de una partícula que se encuentre en el lugar q en el instante t, y en otro lugar, q', en el t'. Pero así se pasa por alto que la posición, q, no es un «observable», en tanto que (q, t) sí lo es; en efecto, cabe encontrar cierta posición en cierto instante, t_1, valiéndose de un medidor de (q, t_1), pero un medidor de (q, t_2) no es «el mismo medidor» en el sentido cuantista de esta expresión; y aun cuando $P(q, t_1 \rightarrow q', t_1) = \delta_{qq'}$, existe una probabilidad finita que liga (q, t_1) con (q', t_2),

probabilidad que se denota con $P(q, t_1 \rightarrow q', t_2)$. Debido a la analogía que hay en mecánica entre *(q, t)* y *(E, p)*, siendo E = energía y p = momento, es de esperar que la E sola sea incapaz de caracterizar un «estado» en el sentido de la teoría cuántica, en tanto que *(E, p)* pueda hacerlo; lo cual es completamente exacto con tal de que en p entren el momento cinético, mv, y el «momento potencial»; pues lo mismo que sólo se conserva la energía total (= cinética + potencial), igual ocurre con el «momento total». (Para los detalles consúltense los textos de mecánica.)

Llegamos ahora al teorema de la *simetría bilateral* de las probabilidades de transición:

$$P(A_k \rightarrow B_j) = P(B_j \rightarrow A_k) \tag{4}$$

Dicho con palabras: la probabilidad de que un átomo que se encuentre en el estado A_k (cosa averiguada mediante un medidor de *A)* salte al estado B_j al someterse al escrutinio de un medidor de B es igual a la probabilidad de que se produzca el proceso inverso. Lo cual corresponde a la mecánica determinista clásica, en la que la evolución del estado A al B es reversible, o sea, simétrica con respecto a los estados inicial y final.

Importa mucho darse cuenta de que las probabilidades simétricas de transición, P, de que nos ocupamos, que se refieren a cambios que se efectúen bajo los instrumentos de ensayo *(idealizados)*, no guardan relación alguna con las probabilidades de transición que desempeñaron un destacado papel durante los primeros años de la teoría cuántica. En aquella época lo que interesaba era la probabilidad, $w(E \rightarrow E')$, de que un átomo saltase de un nivel elevado de energía, E, a otro más bajo, E', con *emisión* de un fotón de energía $\epsilon = E - E'$, que quedaría integrado en una radiación de frecuencia $\nu = \epsilon/h$, así como el proceso de *absorción*, inverso del anterior. En el caso de equilibrio térmico entre átomos y radiación, las dos probabilidades w tienen que ser iguales. Con objeto de obtener la fórmula de radiación de Plank relativa a la distribución espectral de la energía en la radiación, Einstein supuso que la probabilidad de absorción es proporcional al número de átomos, N', del nivel inferior, E', dispuestos para efectuar una absorción y al número, n, de fotones de energía $h\nu$ que haya en el campo de radiación *antes* de que se produzca el acto de absorción; y que la probabilidad de emisión es proporcional al número de átomos, N, que se encuentren en el nivel inferior, E, así como al número $(n + 1)$ de fotones *tras* el acto de emisión; con lo cual llegó a la igualdad

$$w(E \rightarrow E') = \mathrm{C^{te}} \cdot N \cdot (n + 1) = \mathrm{C^{te}} \cdot N' \cdot n = w(E' \rightarrow E).$$

Dado que la relación numérica correspondiente al equilibrio de los átomos es

$$N/N' = \exp(-E/kT)/\exp(-E'/kT)$$

a la temperatura absoluta T (siendo k la constante de Boltzmann), y puesto que

$$E - E' = \varepsilon = h\nu,$$

las tres últimas fórmulas dan lugar al resultado

$$n = 1/[\exp(h\nu/kT) - 1]$$

para el número medio, n, de fotones de energía $h\nu$ que constituyan la componente de frecuencia ν de la radiación, que es la ley de Planck de la radiación de energía. Las probabilidades w se refieren a las transiciones de un nivel de la energía del átomo a otro, bajo la *influencia perturbadora* externa de la radiación, por lo cual $w(E - E')$ tiene un valor finito; en cambio, las probabilidades P que hemos venido utilizando se refieren a transiciones que se efectúen durante los *ensayos* con instrumentos (idealizados) de medida o «medidores»; la probabilidad P se refiere a un átomo, mientras que w depende de los números N y n.

El teorema, postulado o axioma de la simetría bilateral (4), tiene consecuencias de gran alcance. *Primero,* las columnas de la matriz (P_{AB}) son ahora idénticas a las filas de la matriz (P_{BA}); pero como estas últimas suman cada una la *unidad,* lo mismo sucederá con aquéllas; es decir, además de la suma (1) llegamos a

$$\Sigma_k P(A_k \rightarrow B_j) = 1 \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots N. \tag{5}$$

De modo que la suma de las probabilidades de que un átomo llegue al estado B_j al someterlo a ensayos mediante medidores de B a partir de diversos estados iniciales, $A_1, A_2, \ldots, A_N$, es la *unidad.* Y debido a la simetría bilateral cabe reemplazar las flechas $\rightarrow$ por dobles flechas $\leftrightarrow$, o bien pueden simplemente omitirse de ahora en adelante.

Segundo, si la suma de los elementos de cada fila y la de los de cada columna vale la unidad, de ello se sigue que tiene que haber tantas filas como columnas: en efecto, supongamos que el conjunto A conste de M miembros y el B de N; al sumar todas las P por columnas, su suma es N, mientras que sumándolas fila por fila la suma es N; por lo cual, $M = N$. Análogamente, las filas y columnas de la matriz (P_{BC}) tienen que tener igual multiplicidad; y así sucesivamente. Por consiguiente, todos los conjuntos de estados, $A, B, C, \ldots$, de un sistema mecánico dado han de poseer la misma multiplicidad, o, dicho de otro modo, las tablas de P serán cuadradas, con M filas y M columnas (tales que la suma de los elementos de cada una valga la unidad); y se las puede llamar cuadrados mágicos unitarios o *matrices de suma unidad,* siendo su nombre técnico en él «matrices doblemente estocásticas». El caso particu-

lar (3) quiere decir que $(P_{AA'})$ es la matriz *unidad*, con la diagonal formada por *unos* y el resto por *ceros*.

Las ecuaciones (1) a (5) representan el trasfondo formal sobre el que se apoyan las consideraciones concernientes a la dependencia mutua de las diversas matrices, (P_{AB}), (P_{BC}), etc., en particular la ley de la interferencia de probabilidades en función de las amplitudes probabilitarias, denotadas por ψ (capítulo VI). Vamos a dedicar el resto del presente capítulo a aclaraciones y aplicaciones.

17. Estados y observables.

Cuando se somete a ensayo con un medidor de B una serie de átomos que originariamente se hallen en el estado A_k, puede aparecer uno cualquiera de los estados B_1, B_2, ... Hay instrumentos, llamados *separadores,* que distribuyen directamente los átomos de entrada sobre los estados B con probabilidades (o frecuencias relativas estadísticas) $P(A_k, B_j)$; tenemos un ejemplo en el separador de Stern-Gerlach, que produce el efecto de desdoblamiento en varios estados de orientación con respecto a un campo magnético.

Mediante bloqueo de todos los componentes B_1, B_2, ..., con la excepción de B_j, el *separador de* B puede convertirse en un *filtro de* B_j. En el caso del filtro de B_j de Stern-Gerlach, consistente en un campo magnético de orientación B, las partículas que pasen el aparato, cuya orientación será B_j, podrán ser dirigidas hacia un campo de Stern-Gerlach de orientación C, que forme cierto ángulo con la dirección B; en este caso, las partículas B_j, al pasar por el campo C, habrán de elegir entre los estados de orientación en el campo C, o sea, los C_1, C_2, ..., y efectuarán los «saltos» desde el estado B_j a los distintos estados C_n con probabilidades $P(B_j, C_n)$. Se dice que los estados de orientación B_j y C_n son mutuamente *incompatibles;* y si una partícula que perteneciese inicialmente al grupo B_j resulta luego poseer el estado C_n y se la somete de nuevo al ensayo del estado B, *puede* mostrar uno cualquiera de los estados B_1, B_2, ..., cuya aparición individual será impredecible, pero a los que corresponderán las probabilidades $P(C_n, B_k)$. De manera análoga, los estados energéticos y los de posición de las partículas son «mutuamente incompatibles», hecho de vital importancia para la mecánica cuántica de los átomos.

La incompatibilidad mutua de dos cantidades observables, A y B, se refiere a su vinculación probabilitaria o estadística: no quiere decir, con toda generalidad, que los dos valores A_k y B_j no puedan coexistir. En el ejemplo de la orientación en un campo magnético es imposible que una partícula magnética con precesión tenga un ángulo de orientación fija con respecto a los dos cam-

pos B y C a la vez, ya que ambos conjuntos de estados (el B y el C) son de la misma índole general; pero no hay razón alguna para negar que una partícula que haya sido sometida a ensayo en un medidor de energía y haya resultado encontrarse en el estado E_k pueda tener asimismo cierta posición, q, en el instante t, por más que los estados E y los (q, t) sean incompatibles. Pues la incompatibilidad de A_k y B_j únicamente quiere decir que no puede *prepararse* ni *predecirse* la aparición de la pareja de valores A_k y B_j; y el que sea posible o no *averiguar* su existencia simultánea depende de si se admiten solamente mediciones «directas» o si se toleran reconstrucciones de datos (insistiremos sobre esta cuestión en el apartado 37); así pues, la idea de Bohr de que dos datos de tal tipo no pueden *coexistir* es, evidentemente, de carácter metafísico: el hecho empírico es sólo la imposibilidad de preparación o predicción simultánea de una pareja de datos A_k y B_j.

Cosa enteramente distinta de la incompatibilidad entre dos datos, A_k y B_j, que se refieran a dos observables distintos, A y B, es el concepto de «ortogonalidad mutua» de dos estados del mismo observable: un átomo puede encontrarse en el estado A_m o en el A_n, pero nunca simultáneamente en los estados A_m y A_n; o sea, la relación probabilística entre A_m y A_n es $P(A_m, A_n) = 0$, siendo m y n distintas; se dice que A_m y A_n son *mutuamente excluyentes* o bien que son *mutuamente ortogonales* (en virtud de cierta analogía geométrica).

En todas estas consideraciones carece de importancia que los diversos valores del observable A, esto es, $A_1, A_2, \ldots$, llamados *valores propios* o *autovalores* de A, constituyan una serie discreta o se encuentren distribuidos de modo continuo o casi continuo; así, los autovalores de la energía del átomo de hidrógeno, E, son continuos para valores positivos de E, pero discretos para valores negativos; de modo que, si bien nos ocupamos aquí del caso de «espectros» discretos de autovalores de un observable, ello se debe únicamente a razones de sencillez matemática. Además, ha de advertirse que el mismo medidor de energía que se utilice para averiguar los valores de E podrá averiguar los valores del observable $E^* = E^3$; por lo cual podrá denotársele lo mismo como medidor de E^* que como medidor de E^3.

Es preciso ser bastante cauto en la atribución de los términos 'estado' y 'observable' en la teoría cuántica. La posición, q, por ejemplo, no es un observable que tuviera estados q_n, en tanto que la posición en un instante temporal determinado, (q, t), sí es un observable: es decir, el conjunto $A_1, A_2, \ldots$, puede designar la ubicación espacial en el instante t_A, o sea, el observable (q, t_A), y el conjunto $B_1, B_2, \ldots$, puede designar los datos correspondientes al observable (q, t_B); pero entonces la medición de B, es decir, de (q, t_B), no constituye una repetición de la medición de A, que se refiere a (q, t_A), y los resul-

tados A están vinculados a los B por las probabilidades definidas $P(A_k, B_j)$. Esto hace ver que en el caso de cantidades no conservativas, tales como la posición, q, el instante de observación es esencial. Asimismo, hay que observar que, si bien se siente uno inclinado a hablar de estados energéticos, ello no es enteramente exacto en el sentido cuantista de «estado bien definido» o «reproducible»: de igual modo que la energía es la suma de la energía potencial más la cinética, el momento se compone del momento cinético más el potencial; la suma de los dos es constante en el espacio, lo mismo que la suma de las dos partes de la energía es constante en el tiempo; y, hablando estrictamente, lo que es un observable es (p, E), que constituye una combinación de magnitudes constante en el tiempo y en el espacio, y conjugada del observable (q, t).

Al decir que los «estados» se encuentran «bien definidos» únicamente cuando se ajustan a las reglas probabilísticas antes formuladas, no incurrimos en ninguna definición circular: por el contrario, el proceder de la física teórica consiste siempre en verse alentado por unos ejemplos espectaculares a construir cierto esquema expresado en símbolos matemáticos que se ajuste a tales ejemplos especiales; y más tarde se amplía la validez del esquema para que abarque otros ejemplos nuevos y debidamente escogidos.

Tras haber estudiado los «estados» de las cantidades observables, ocupémonos ahora de los *objetos* cuyos sean tales estados. Uno de tales objetos es el átomo de hidrógeno, que es capaz de encontrarse en un número infinito de estados, dotados de energías interna y de traslación diversas. Mayor interés ofrece, sin embargo, un «tipo restringido» de átomo H: el que se encuentra en un estado de traslación definido (por ejemplo, con su centro de gravedad en reposo) y posee, pese a ello, cierta variedad de estados internos posibles. Un conjunto ortogonal de estados internos —que podemos denotar con el nombre de conjunto A— está caracterizado por tres números cuánticos, nlm, de los cuales n caracteriza la energía, l el momento angular y m la componente de este último con respecto a una dirección fija, A, de un campo magnético (dejamos de lado ahora el espín). Otro conjunto de estados, B, del mismo tipo restringido de átomo H estará caracterizado por los números cuánticos nlm^*, siendo m^* la orientación con respecto a un campo magnético orientado en otra dirección, B; otro conjunto más de estados se caracterizará por varias ternas de números cuánticos «parabólicos», $n_1\ n_2\ m$, correspondientes a estados orientados en un campo eléctrico; y así sucesivamente. Cada uno de estos conjuntos ortogonales de estados posee la misma multiplicidad, $M = \infty$. Consideremos ahora un «tipo» de átomo H más restringido: por ejemplo, uno que posea, de una vez para siempre, una energía definida, E_4, y, en forma correspondiente, un número cuántico $n = 4$; todavía será capaz de adoptar diversos estados, de los cuales un conjunto estará caracterizado por las parejas de números cuánticos

lm, otro conjunto por *lm**, etc.; y todos estos conjuntos tendrán igual multiplicidad, $M = 16$ (dado que l puede adoptar los valores 0, 1, 2 y 3 y que m varía de l a $-l$). Se tiene un tipo de átomo H aún más restringido cuando $n = 4$ y $l = 2$, por ejemplo; sus conjuntos ortogonales de estados estarán caracterizados por los números cuánticos m o m^*, y la multiplicidad de todos ellos será $M = 5$. Estos ejemplos apoyan el teorema según el cual los diversos conjuntos ortogonales de estados de cierto «tipo» de átomo tienen *la misma multiplicidad M,* y que, por consiguiente, dan lugar a tablas cuadradas de P con M filas y M columnas.

18. La medición.

En su ensayo «Sobre las nociones de causalidad y de complementaridad», Niels Bohr [2] escribía lo siguiente: «En esta situación nos enfrentamos con la necesidad de revisar radicalmente los fundamentos de la descripción y la explicación de los fenómenos físicos. Mas es preciso reconocer, ante todo, que, por mucho que los efectos cuánticos trasciendan el alcance del análisis físico clásico, siempre habrá que exponer cuál haya sido el dispositivo y montaje experimental expresándolo en el *lenguaje corriente* suplementado con la terminología de la física clásica: se trata de un requisito lógico muy simple, ya que, esencialmente, la palabra 'experimento' sólo puede usarse a una situación en la que podamos contar a otros lo que hayamos hecho y lo que hayamos averiguado».

He actuado en el estudio precedente de acuerdo con el «requisito lógico», de Bohr, valiéndome, a modo de instrumentos de ensayo, sólo de dispositivos (a los que he llamado «filtros», «separadores» y «medidores») tales que no sufran de modo apreciable la influencia de los objetos a ensayar: se trataba de *instrumentos macrofísicos,* que se mantenían intactos aun cuando hicieran pasar al micro-objeto ensayado de su estado original a uno de los estados caracterizadores del «medidor». Por ejemplo, un cristal birrefringente es un «separador» de dos estados ortogonales de polarización, A_1 y A_2, mientras que un prisma de Nicol es un «filtro», que deja pasar A_1 y repele A_2; pero se supone que el Nicol mismo no se ve afectado por su propia actividad. Otro ejemplo: lo que normalmente se conoce con el nombre de vara de medir (o, más vulgarmente, metro) es un «separador de posiciones» o «medidor de posición», que puede emplearse una y otra vez, proporcionando unas posiciones de una partícula con respecto a un punto 0 fijo que serán objetivas, reproducibles; análogamente, se supone que la solidez del medidor de energía es tan grande que cabrá registrar con él la energía que tenga una partícula sin que resulte afectado por tales mediciones, etc. Habría que reservar el uso de las expresiones 'medición'

y 'preparación de un estado' (Margenau) para cualquier «situación en la que podamos contar a otros lo que hayamos hecho y lo que hayamos averiguado» (Bohr) de forma objetiva y confirmable. Sin embargo, si los «estados» son reproducibles, no veo razón alguna por la cual necesitásemos una nueva *filosofía* del conocimiento, en la que quedaría eliminada la expresión 'estado objetivo': lo único que exige la física cuántica es que seamos cuidadosos al aplicar el término 'estado'; así, (q, t) es un estado, y lo mismo sucede con (p, E), pero no existe estado alguno —en sentido cuántico— que responda a la combinación de magnitudes (q, p); análogamente, hay estados de viscosidad, v, del agua, y estados de torsión, w, de una columna de agua helada, pero no hay combinación reproducible alguna de tales magnitudes, ni, por consiguiente, estados (v, w). Es cierto que la incompatibilidad de p y q ha constituido un descubrimiento físico de máxima importancia, frente a la incompatibilidad de v y w, perfectamente conocida; pero si el caso vw no pide una nueva filosofía ni un nuevo lenguaje, tampoco lo hará el caso pq. (Más sobre este punto en el capítulo VIII.)

RESUMEN

a) Podemos sintetizar como sigue el contenido puramente formal del capítulo IV. Supongamos que a los elementos de una clase S de entidades se les haga corresponder unas fracciones positivas, $P(S_1, S_j)$, y menores que la unidad, con la sola excepción de $P(S_1, S_1) = 1$; los elementos de S pueden subdividirse luego en subclases, $A, B, C, \ldots$, tales que cada una de ellas contenga un conjunto completo de elementos mutuamente ortogonales, tales que $P(A_k, A'_k) = \delta_{kk'}$; suponemos también que las fracciones P que enlacen elementos de subclases distintas satisfarán la regla de la suma unidad, $\Sigma_j P(A_k, B_j) = 1$, que se refiere a las filas de las matrices P; y las P han de ser simétricas, de modo que $P(A_k, B_j) = P(B_j, A_k)$; por tanto, la regla de la suma unidad valdrá también para las columnas, $\Sigma_k P(A_k, B_j) = 1$, de modo que las matrices de P serán "cuadrados mágicos unitarios". En consecuencia, las distintas subclases $A, B, C, \ldots$, tendrán igual multiplicidad.

b) Esta subestructura formal se convierte en una teoría física al identificar las entidades S con los estados cuánticos de un sistema mecánico, y $P(A_k, B_j)$ con el grado de igualdad parcial entre los estados A_k y B_j, definido por la parte o fracción que pase victoriosamente un ensayo. Y entonces el postulado de la *simetría* bilateral de las probabilidades de transición corresponde a la reversibilidad clásica de los procesos deterministas.

Capítulo V

El trasfondo termodinámico

"El desorden molecular no sólo quiere decir que se excluyen estados tan ordenados como el de que todas las moléculas se moviesen paralelamente, sino que también se excluye la reflexión temporal de cualquier estado permitido."

SCHRÖDINGER.

19. La continuidad frente a la equipartición de la energía.

Es un hecho extraño que la misma teoría cuántica que tan notoria es por sus discontinuos «saltos cuánticos» se originase en la necesidad de restaurar la *continuidad* de las propiedades térmicas de los cuerpos. En realidad, Max Planck se vio obligado a introducir la hipótesis cuántica, $\Delta E = h\nu$ (para un oscilador de frecuencia ν), al estudiar el contenido energético térmico de muchos osciladores situados en un campo de radiación. Análogas consideraciones son aplicables a la energía térmica de un cuerpo sólido, al que se idealiza haciéndole constar de muchas partículas oscilantes con la misma frecuencia, ν, como resultado de una fuerza de ligadura común a todas y constante.

Según la mecánica clásica, la energía media por partícula a la temperatura T debería ser $3kT$ (siendo k la constante de Boltzmann). Este valor, de acuerdo con la mecánica estadística, habría de ser independiente de que la ligadura entre las partículas se efectuase a alta o baja frecuencia (correspondiendo a una constante de ligadura respectivamente grande o pequeña); mas, por otra parte, si tal constante aumenta hasta hacerse infinita, de modo que las partículas no puedan moverse, su energía térmica habrá de ser *cero*. Ahora bien, este resultado de la mecánica estadística clásica implica una discontinuidad inaceptable; pues supongamos que la constante de ligadura y la correspondiente frecuencia de vibración pasen gradualmente a valores cada vez mayores: entonces, la energía media por partícula habría de permanecer siendo $3kT$, aun cuando la constante citada alcanzase unos valores enormes, y sólo en el último instante, cuando las partículas quedasen totalmente fijas, decrecería bruscamente su energía media de $3kT$ a cero —si es que está en lo cierto la teoría clásica—. Teniendo en cuenta el postulado general de continuidad de la causa y el efec-

to, sería de esperar (y tal es lo que en realidad se encuentra) una disminución *gradual* de la energía térmica por partícula desde $3kT$ a cero al ir aumentando gradualmente la frecuencia ν, en lugar de tener la misma $3kT$ para todas las ν (equipartición); de modo que debe haber algo equivocado en la teoría clásica.

Max Planck logró superar la paradoja de la discontinuidad de la energía en el caso de los valores medios de la energía térmica introduciendo la nada clásica hipótesis de que un oscilador de frecuencia ν sólo puede alterar su energía, E, por cantidades $\Delta E = h\nu$, y de que, por consiguiente, sus posibles contenidos energéticos serán múltiplos del cuanto $h\nu$ a partir de la energía mínima, que es cero (o $\frac{1}{2}\, h\nu$). Por tanto, a baja temperatura, una partícula fuertemente ligada o una vibración electromagnética de elevada frecuencia ν sólo podrán ascender al nivel $h\nu$, que representará una energía muy grande, en contadas ocasiones, y permanecerán, pues, en la mayoría de los casos, al nivel mínimo; de ahí que presenten una energía media reducida, que se irá acercando *gradualmente* a cero cuando ν se acerque gradualmente a infinito. La hipótesis de Planck fue un rasgo genial: era el supuesto exacto entre todos los muchos posibles que hubieran restaurado la continuidad de la energía térmica; mas, sin embargo, era una hipótesis *ad hoc*, que no podía haberse deducido sólo del postulado general de la continuidad de la energía, dado su carácter abstracto.

20. La continuidad de la entropía frente a la paradoja de Gibbs.

El postulado de continuidad de la entropía que vamos a introducir a continuación no presenta tal defecto: sin necesidad de intuición creadora alguna conduce directamente a los fenómenos que se representan gráficamente en la figura 2c (pág. 49). La entropía se ha definido siempre valiéndose de «filtros», o sea, de diafragmas semipermeables; mas la mecánica estadística clásica sufre una discontinuidad, señalada primeramente por Gibbs en mil ochocientos setenta y tantos. Con objeto de presentar visiblemente la *paradoja gibbsiana de la entropía*, imaginemos dos cantidades iguales del mismo tipo de partículas gaseosas, a igual temperatura y encerradas en dos recipientes del mismo volumen, V, separados entre sí por una pared. Las partículas de uno de estos volúmenes gaseosos podrán encontrarse en el estado A, y las del otro en el estado B: por ejemplo, si las partículas son átomos de plata, las direcciones de los ejes atómicos del gas A podrán apuntar hacia el norte, y las del gas B formar un ángulo θ con tal dirección (las direcciones de los ejes podrían conservarse merced a una rarefacción extrema). Si ahora quitamos la pared separadora de los dos volúmenes gaseosos, ambas masas de gas se difundirán por todo el volumen total, $2V$; proceso de difusión que va ligado a un aumento

de la entropía, S, y del trabajo isotérmico máximo, W (que puede obtenerse haciendo que el proceso de difusión tenga lugar de forma isoterma y reversible: por ejemplo, utilizando una membrana semipermeable que deje pasar libremente una de las dos masas gaseosas, pero sufra la presión de rechazo procedente de la otra masa). El aumento del trabajo isotérmico máximo, δW, y el de entropía, δS, que se originan en el proceso de difusión, valen

$$\left.\begin{aligned} \delta W &= 2NkT \cdot ln\, 2 \\ \delta S &= 2Nk \cdot ln\, 2 \end{aligned}\right\} \text{para } A \neq B \qquad (1)$$

siendo $2N$ el número total de moléculas de gas (en las dos muestras juntamente). Por otra parte, si los dos estados A y B son *iguales* no hay filtro capaz de separarlos, de modo que es imposible que se efectúe trabajo alguno en el proceso de difusión, por lo cual

$$\left.\begin{aligned} \delta W &= 0 \\ \delta S &= 0 \end{aligned}\right\} \text{para } A = B \qquad (2)$$

Imaginemos ahora que la diferencia entre A y B (por ejemplo, la diferencia angular, θ, entre las respectivas orientaciones de sus ejes atómicos) decrece gradualmente, y que acaba por desaparecer totalmente. Mientras subsista una diferencia, por pequeña que sea, según las ideas clásicas, la mezcla de los dos gases dará lugar a la totalidad del incremento del trabajo isotérmico y de la entropía, según (1); pero si, finalmente, la diferencia (por ejemplo, el ángulo θ) disminuye desde un valor finito, pero pequeñísimo, a exactamente *cero,* según la termodinámica estadística clásica δW y δS caerán bruscamente del valor (1) al valor *cero,* de acuerdo con (2). Tal es la *paradoja (de la discontinuidad) de Gibbs,* paradoja que la teoría clásica no es capaz de resolver, por más que se hayan propuesto diversos modos de responder a ella. Se ha dicho, por ejemplo, que la situación paradójica que considera Gibbs no se encuentra nunca en la Naturaleza, ya que dos especies gaseosas ofrecen siempre una diferencia finita o ninguna, debido a que las diferencias entre las masas gaseosas están determinadas por números enteros (por ejemplo, por el número de electrones de la molécula, etc.). Por consiguiente, *no tendríamos que preocuparnos de la paradoja.*

Mas esto parece más bien acabar discursivamente con la paradoja que resolverla. Es cierto que no cabe igualar en forma gradual las especies distintas de átomos o moléculas de gas; pero este argumento falla para diferentes *estados, A* y *B,* del mismo tipo de átomos, ya que las consideraciones del capítulo III han hecho ver que el postulado general de la continuidad de la causa y el efecto exige el efecto de desdoblamiento de la figura 2c, y, por consiguiente, la existencia de una igualdad parcial entre los dos estados, $A \sim B$, intermedia

entre $A = B$ (inseparabilidad) y $A \neq B$ (separabilidad): en el caso $A = B$ las partículas B atraviesan el filtro A, y, por tanto, no ejercen presión sobre él; en el caso $A \neq B$, las partículas B dan origen a una presión, y en el caso $A \sim B$ sólo las partículas B rechazadas ejercen presión y contribuyen a crear el valor δS; de modo que cuando el estado de las partículas pasa gradualmente de $B = A$ a $B \neq A$ a través de $B \sim A$, la entropía de la difusión, δS, pasa gradualmente del valor 0 al valor $2Nk \cdot ln\ 2$ [1].

Los átomos de plata con espín orientado al norte no pueden separarse completamente de aquellos cuyo espín forme un ángulo θ con respecto a aquella dirección, ya que la fracción o parte de los que son iguales es $P = \cos^2(\frac{1}{2}\theta)$; y, en general, cuando dos masas gaseosas cada una de las cuales conste de N partículas tienen una fracción o parte igual P, su difusión mutua lleva a un aumento de entropía, δS, intermedio entre $\delta S = 0$ para $P = 1$ (igualdad completa) y $S = Nk \cdot 2 \cdot ln\ 2$ para $P = 0$ (desigualdad completa). Con lo cual se resuelve la paradoja de Gibbs [1] al existir continuidad de la entropía cuando P varía gradualmente de $P = 0$ a $P = 1$, según hemos ejemplificado con la disminución del ángulo entre las direcciones de los espines desde 180 grados hasta cero. Y viceversa: si se empieza por postular que no existe la paradoja gibbsiana de la discontinuidad de la entropía (la paradoja de que δS sea o bien igual a 0 o a $Nk \cdot 2 \cdot ln\ 2$), sino que en la realidad se forma un puente de valores intermedios de δS, cabría «predecir» que tiene que ocurrir una separabilidad parcial, juntamente con efectos de separación tales como el pintado en la figura 2c (pág. 49).

21. La entropía de los gases diluidos.

La incapacidad de las consideraciones clásicas para superar la paradoja de Gibbs resulta también manifiesta cuando se trata del valor de la entropía de una sola masa de gas que contenga N partículas a la temperatura absoluta T, encerrada en un volumen V a la presión $p = NkT/V$. En efecto, la mecánica estadística clásica conduce al siguiente valor de la entropía, S:

$$S(N, V, T) = Nk\{ln\ V + C \cdot ln\ T + C^{te}\}, \tag{3}$$

en donde la C^{te} no depende de V ni de T, y C vale $3/2$ para moléculas monoatómicas y $5/2$ para las diatómicas; pero esta expresión de S es insatisfactoria. Pues supongamos que haya siete muestras iguales de gas sometidas a iguales condiciones externas y encerradas por separado en los correspondientes volúmenes V; la entropía total será

$$\mathscr{S}_n = 7 \cdot S(N, V, T).$$

Retiremos ahora los tabiques que separen las muestras de gas, de modo que haya ahora una sola masa con $7N$ partículas encerrada en el volumen $7V$, a la que corresponderá la entropía

$$\mathcal{S} = S(7N, 7V, T).$$

De acuerdo con (3), la diferencia de entropía es

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_0 = \delta\mathcal{S} = 7\,Nk \cdot ln\,7. \tag{4}$$

Pero, en realidad, no hay diferencia de entropía cuando varias masas del mismo gas se difunden entre sí. Por consiguiente, es preciso modificar la expresión (3) de modo que proporcione el valor $\delta\mathcal{S} = 0$ cuando gases iguales se difundan mutuamente, así como unas expresiones intermedias entre $\delta\mathcal{S} = 0$ y el valor clásico, dado por (4), siempre que se trate de gases con cocientes de igualdad parcial P (esto último con objeto de superar la paradoja de Gibbs). Así pues, la entropía debe ser tal que con siete masas de gas *iguales* se tenga

$$\mathcal{S}_0 = 7 \cdot S(N, V, T) = S(7N, 7V, T) = \mathcal{S} \tag{5}$$

en lugar del valor (4), que sólo es exacto cuando la difusión se produce entre siete gases distintos.

Ahora bien, como la dependencia de S respecto de V y de T está garantizada por la termodinámica, la única modificación posible de (3) consiste en hacer que la C^{te} dependa de N; así podemos escribir, de modo provisional,

$$S(N, V, T) = Nk\{ln\,V + C \cdot ln\,T + f(N)\}, \tag{5'}$$

y determinar luego $f(N)$ de tal modo que se satisfaga (5). Cuando se sustituye (5') en (5) se obtiene para $f(N)$ la función

$$f(N) = -ln\,N + K,$$

siendo K una constante independiente de V, T y N, aunque puede depender del tipo de partículas de que se trate (por ejemplo, de su masa). Así se llega a la expresión correcta de S, que es

$$S(N, V, T) = Nk\{ln\,V + C \cdot ln\,T - ln\,N + K\} \tag{6}$$

y que difiere de la (errónea) expresión clásica dada por (3) en el término $-Nk \cdot ln\,N$.

Ahora bien, la constante K, que está relacionada con la llamada constante química, desaparece al calcular la diferencia de entropías cuando el número de partículas se conserva; y así llegamos, con siete masas de gas iguales, a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, de acuerdo con (5). Cuando lo que se tiene son siete masas gaseosas comple-

tamente diferentes, todas ellas difundiéndose en el volumen común $7V$, es preciso exigir $\mathcal{S} - \mathcal{S}_0 = 7 \cdot S(N, 7V, T) - 7 \cdot S(N, V, T)$, lo cual, según (6), da $7Nk \cdot ln\ 7$, valor también exacto. El caso de la difusión de (dos) masas gaseosas parcialmente iguales lleva a la fórmula (8) de la página 73.

El resultado a que hemos llegado, a saber, que es necesario restar a la expresión clásica de la entropía el término $Nk \cdot ln\ N$, que cuando N es muy grande equivale a $k \cdot ln\ (N!)$ (recuérdese la fórmula de Stirling), quiere decir que la probabilidad clásica de una configuración de N partes idénticas tiene que dividirse por el factor permutatorio $N!$; esto es, *las $N!$ permutaciones de N partículas idénticas han de contarse como si constituyesen un solo caso.* Los teóricos cuánticos llegaron a esta conclusión cuando empezaron a ocuparse de ciertas cuestiones acerca del carácter simétrico de las funciones ψ, o sea, bastante tardíamente; pero ahora vemos que tal resultado se sigue del requisito, puramente termodinámico y *no cuantista,* de que la difusión de muestras de gas no aumente la entropía; consideración que debería contribuir a *desmisticar* las leyes cuánticas merced a su deducción a partir de postulados no cuantistas.

Cabe obtener el mismo resultado de forma todavía más sencilla. Imaginemos N moléculas, todas del mismo tipo y en el mismo estado, situadas en alguna parte de un conjunto de N recipientes adyacentes y de igual volumen, V_1 a V_N; supongamos también que la probabilidad de tal configuración sea P_0 y su entropía $S_0 = k\ ln\ P_0$. Supongamos ahora que se retiran los tabiques de separación, de modo que las partículas puedan intercambiar su posición; de acuerdo con los puntos de vista clásicos, la nueva probabilidad, debida a $N!$ permutaciones de N partículas idénticas, tendrá que ser $N!$ veces mayor, y la entropía sería ahora $S = S_0 + k\ ln\ (N!)$; pero, con objeto de llegar al resultado correcto, $S = S_0$ (puesto que no es posible aumentar el trabajo isotérmico por el mero hecho de retirar los tabiques), es preciso omitir el factor permutatorio, $N!$. Estas consideraciones, que proceden de la *Termodinámica estadística,* de Schrödinger ([2]), son independientes de todo rasgo típicamente cuántico (tales como la interferencia probabilitaria o la periodicidad de pq). Y, al mismo tiempo, cabría decir que la ecuación de Boltzmann, $S = k\ ln\ P$, sólo es verdadera si P se elige de modo que tal ecuación sea verdadera.

Cuando dos masas de gas, cada una de las cuales contenga N partículas, se difunden a partir de dos volúmenes V separados en el volumen común $2V$, el aumento de entropía, $S - S_0$, vale, según (6),

$$\text{para gases iguales: } S(2N, 2V, T) - 2\,S(N, V, T) = 0; \tag{7a}$$

$$\text{para gases distintos: } 2\,S(N, 2V, T) - 2\,S(N, V, T) = 2kN\ ln 2. \tag{7b}$$

¿Qué importancia tiene el aumento de entropía debido a la difusión cuando las dos masas gaseosas poseen una igualdad parcial, P, comprendida entre

0 y 1 y pasan del estado de separación al de mezcla (fig. 3a)? Con objeto de averiguarlo, tratamos de efectuar una infusión (adiabática e isotérmica) en dos recipientes también separados; para lo cual introducimos otro recipiente de

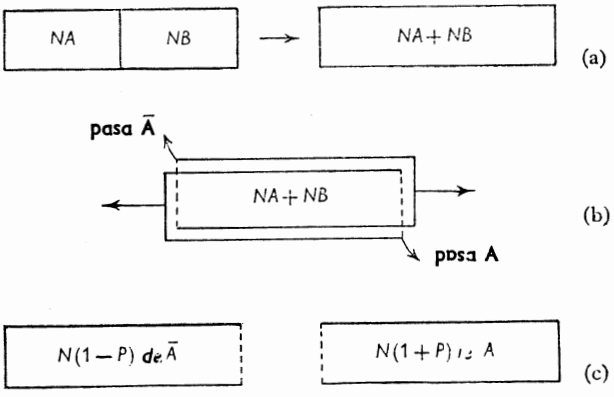

Figura 3, a, b y c

volumen $2V$, que estará dotado de un filtro de pasa A en su extremo derecho, mientras que al recipiente original (doble) se lo dotará de un filtro de pasa $\bar{A}$ en el extremo izquierdo (fig. 3b); y en estas condiciones se separarán los dos recipientes de volumen $2V$, hasta quedar en la posición representada en la figura 3c. Para calcular el contenido de los recipientes así separados nos valdremos de las siguientes consideraciones: el filtro de pasa A del extremo derecho no solamente deja pasar las N partículas A presentes, sino que desdobla el conjunto de las N partículas B en las NP_{BA} partículas A, que permanecerán a su derecha, y las $N(1 - P_{BA})$ partículas $\bar{A}$, que serán barridas hacia la izquierda, ejerciendo cierta presión sobre el filtro de A; de modo que las dos masas separadas de gas de la figura 3c poseerán una entropía total (escribiendo P en lugar de P_{BA}):

$$\mathcal{S} = S(N(1 - P), V, T) + S(N(1 + P), V, T).$$

Aplicando ahora (6) a $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_0$ llegamos a

$$\mathcal{S} - \mathcal{S}_0 = Nk[2ln2 - (1 - P)ln(1 - P) - (1 + P)\,ln(1 + P)] \qquad (8)$$

Si la separación se efectuase sirviéndose de un filtro de B y otro de $\bar{B}$ resultaría el mismo valor de $\mathcal{S} - \mathcal{S}_0$ (suponiendo que en este caso P representase a P_{AB}).

Cualquiera que sea la relación entre P_{AB} y P_{BA}, el valor (8) de la diferencia de entropías *resuelve la paradoja de Gibbs,* ya que proporciona una variación gradual de $\mathcal{S} - \mathcal{S}_0$ desde $Nk \cdot 2 \cdot ln\ 2$ a cero cuando la parte o frac-

ción igual, P, pasa gradualmente desde el valor 0 al valor 1. Además, con objeto de obtener un solo valor de la entropía de difusión con independencia de que se determine por medio de filtros A o B, se requiere, como condición necesaria, la *simetría,* esto es, que $P_{AB} = P_{BA}$.

22. Los aumentos de entropía debidos a los ensayos.

Cuando se somete a ensayo con un separador de A una masa de gas compuesta de N partículas, todas ellas de la misma clase y en el mismo estado original, se obtiene una mezcla de estados, $A_1, A_2, \ldots, A_M$, que estarán respectivamente representados por $n_1, n_2, \ldots, n_M$ partículas, cuya suma total será N. Omitiendo los términos dependientes de V y de T, así como la constante de Boltzmann, la entropía de la mezcla resulta ser

$$S_A = -\Sigma_k n_k ln\, n_k ,$$

que es mayor (es decir, menos negativa) que la entropía inicial, que valía

$$S_0 = -N\, ln\, N.$$

Si ahora sometemos la mezcla de estados A a un ensayo en un separador de B, las partículas saltarán a los nuevos estados $B_1, B_2, \ldots, B_M$, con lo que se obtendrán los nuevos números, representativos de la ocupación de tales estados,

$$m_j = \Sigma_k\, n_k \cdot P(A_k, B_j)$$

por lo cual la entropía será ahora

$$S_B = -\Sigma_j\, m_j\, ln\, m_j .$$

Apoyándose en la regla de la suma unidad de las filas y columnas de las matrices P, Von Neumann [3] ha demostrado que S_B es mayor que S_A; análogamente, la S que se obtenga efectuando luego un ensayo con un separador de C será mayor que S_B, y así sucesivamente. De modo que un ensayo tras otro van originando incrementos de entropía:

$$S_0 < S_A < S_B < S_C \cdots \qquad (9)$$

Con una gran probabilidad, S aumenta monótonamente, acercándose a un valor máximo, que corresponde a la *equipartición* entre los M estados, o sea, a $n_1 = n_2 = \ldots n_M$.

Nos topamos aquí, pues, con una extraña diferencia entre la física clásica y la cuántica: en la teoría clásica era preciso prohibir la reversibilidad de los sucesos (según se hace en el lema de este capítulo) con objeto de obtener la

Segunda ley [de la Termodinámica *(T.)*]; y, sin embargo, la reversibilidad clásica constituye el modelo de la simetría bilateral de las probabilidades, que conduce, a través de la propiedad de las sumas unidad de las matrices de *P*, a la irreversibilidad del aumento de entropía que se produce al efectuar ensayos: la *reversibilidad* (simetría) de los procesos individuales entraña la *irreversibilidad* de los promedios; lo cual es análogo a los resultados anteriormente obtenidos, de que la *causalidad* de los promedios entraña la *acausalidad* de los sucesos individuales, y de que la *continuidad* de los promedios entraña la *discontinuidad* de los procesos individuales.

Es menester no olvidarse, sin embargo, de que los resultados estadísticos tales como el de (9) rigen sólo en la abrumadora mayoría de los casos y de que, por tanto, se producen fluctuaciones individuales en torno a los valores medios. Así pues, aunque lo más probable es que la entropía de una mezcla de gases aumente debido al próximo ensayo de separación, en realidad puede decrecer; y cuando se efectúe una larga serie de ensayos la entropía fluctuará por encima y por debajo del máximo de la entropía, como se representa por el ascenso y descenso de los sucesivos peldaños del diagrama escalonado que muestra los valores de *S* en función del tiempo, *t*.

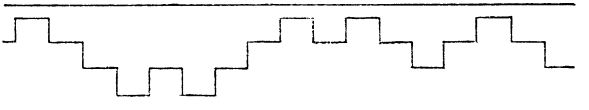

Figura 4

Esta curva (fig. 4) se debe a P. y T. Ehrenfest, que querían hacer visible con ella la entropía de un gas según la *mecánica estadística clásica:* los distintos niveles del diagrama habrían de simbolizar los valores de *S* encontrados en una serie de observaciones efectuadas desde el exterior de la masa gaseosa. Ahora bién, ya se suponga la observación al modo clásico o la transgresión cuántica, la fluctuante curva de *S* presenta una *simetría* general con respecto a las direcciones positiva y negativa del tiempo.

23. Entropía e información.

Suele tomarse por una verdad casi evidente que la entropía y la carencia de información se mueven paralelamente. Sin embargo, se trata de algo discutible, ya que la información es subjetiva, y cambiante de una persona a otra, en tanto que la entropía es una magnitud física objetiva que domina los fenó-

menos termodinámicos, con independencia de que haya alguna persona que mire y adquiera información o no. Fijémonos en un caso típico.

Supongamos que dos recipientes de igual volumen contienen cada uno N átomos de plata en estado gaseoso, y que los de uno de ellos apuntan los ejes de sus espines hacia el norte, mientras que los del otro, en una dirección que forme con él un ángulo θ. Ahora se retira el tabique situado entre ambos recipientes, de modo que se produzca una difusión espontánea. ¿Cuál es el valor cuantitativo del aumento, ΔS, que experimenta la entropía, S, durante el proceso de difusión? Cabe sostener al respecto que observadores distintos darán respuestas diferentes, según sean sus conocimientos generales de la teoría pertinente, la información de que dispongan acerca de las masas gaseosas involucradas y la destreza técnica que tengan para extraer de tal proceso trabajo isotérmico.

Una persona que no sepa que los átomos de plata poseen espín creerá que los dos gases son *iguales,* y para él ΔS será *cero.* Si se entera de la diferencia existente entre las orientaciones de los espines, cambiará de opinión, y defenderá que $\Delta S = 2kN \cdot ln\ N$, que es la expresión usual para la entropía debida a la difusión de dos gases *diferentes.* Pero si sabe más de teoría cuántica votará por

$$\Delta S = Nk\{2\ ln\ 2 - (1+P)\ ln\ (1+P) - (1-P)\ ln\ (1-P)\} \qquad (10)$$

siendo P la parte o «fracción igual» de las dos masas gaseosas; en el caso actual, $P = \cos^2(\frac{1}{2}\theta)$, con lo que se llega a $\Delta S = 0$ para $\theta = 0$ y a $\Delta S = 2kN \cdot ln\ N$ para $\theta = 180$ grados como valores límites, correspondientes, respectivamente, a la igualdad y a la desigualdad.

¿Hemos de conceder, pues, que cada uno de estos tres observadores tendrá razón de acuerdo con la *información* con que cuenta, y que los físicos futuros que estén más informados podrán dar otras respuestas? Mi opinión es que no hay sino un solo valor verdadero de ΔS, independiente de los conocimientos personales: y ello basándome en la propia teoría cuántica que, según se pretende, implica el conocimiento por parte de sujetos observadores. En efecto, esta teoría caracteriza el «estado» de cada partícula por unos pocos números cuánticos; incluso la velocidad está cuantizada en un volumen finito; y, aun cuando no sabemos todavía cuáles son todas las características cuánticas de las partículas nucleares, podemos suponer que sus estados están determinados por un número *finito* de rasgos cuánticos; así pues, si un observador determinado no los conoce, esta falta le es imputable a él, y no afecta al único, verdadero y definitivo valor de ΔS.

Mientras que la teoría clásica tenía cierto derecho a sostener que la entropía posee valores distintos, según sean el grado de conocimiento y los métodos de

separación de que disponga el observador, la teoría cuántica fija un límite superior a la separabilidad de los estados, y, de este modo, proporciona un valor objetivo de las variaciones de entropía, cualquiera que sea el grado de conocimiento que tenga o piense tener un observador: ya desconozca la diferencia entre los dos gases y suponga que $\Delta S = 0$ o sobreestime la diferencia existente entre las dos masas gaseosas, defendiendo, en consecuencia, que $\Delta S = 2kN \cdot ln\ N$, el valor real de ΔS viene dado por la expresión (10) que hemos presentado arriba.

Ciertos físicos se oponen en la actualidad a la tesis de que las magnitudes térmicas, tales como las diferencias de entropía, poseen valores objetivos. Por ejemplo, uno había pensado siempre que los procesos irreversibles (tales como la nivelación de diferencias de temperatura) se producen sin necesidad de que nadie los mire ni se entere de ellos; mas no sería así: «El conocimiento imperfecto define el comportamiento termodinámico de un sistema ... y la irreversibilidad proviene de un conocimiento imperfecto de las condiciones iniciales», dice L. Rosenfeld ([4]); ante lo cual uno se pregunta si el conjunto de procesos irreversibles que preceden al nacimiento de una supernova también «proviene de un conocimiento imperfecto de las condiciones iniciales». El desdén por la diferencia entre lo que *es* y lo que nosotros u otras personas *sepamos* acerca de ello desencadenará siempre la confusión, como ha sucedido, en gran medida, en la interpretación de la teoría cuántica (véase el capítulo VIII); pero la aplicación del «conocimiento imperfecto» a los procesos térmicos hace que las tinieblas cubran todo a mediodía. Tal vez quepa excusar a Rosenfeld con la sentencia de Schrödinger: «Es difícil adivinar lo que quieren decir las personas cuando no dicen lo que quieren decir»; pero en otra ocasión nos deja de nuevo estupefactos al hablar de la «vinculación entre los aspectos estadísticos de la teoría cuántica y la termodinámica: desde luego [!], no existe tal vinculación» ([5]); lo cual hubiera producido una indudable sorpresa a Max Planck, que en 1900 formuló la teoría cuántica basándola, precisamente, en razones termodinámicas.

Debemos otro ejemplo de introducción de las cuestiones del conocimiento en el estudio de las magnitudes térmicas a Heisenberg ([6]): «Cuando describimos la temperatura de un trozo de materia la definimos objetivamente con ayuda de un termómetro; pero cuando intentamos definir qué podría significar la temperatura de un átomo nos encontramos, incluso en física clásica, en una situación mucho más difícil: en realidad, no podemos coordinar este concepto con una propiedad bien definida del átomo, sino que tenemos que vincularlo, al menos parcialmente, con la insuficiencia de nuestro conocimiento de él». Frente a lo que sucedía con Rosenfeld, Heisenberg concede, por lo menos, que las propiedades de un trozo de materia son objetivas, y que el conocimiento tiene

importancia, «al menos parcialmente» (¿qué proporción guarda esta parte con el todo?), sólo para los átomos. A otras personas les parecerá que «la temperatura de un átomo» es una contradicción en los términos, y que la temperatura, según la mide un termómetro, no tiene jamás nada que ver con la insuficiencia de unos conocimientos. Y cuando cierto estudiante respondió a la pregunta «Defina la Segunda ley [de la Termodinámica *(T.)*]» escribiendo: «La confusión del Universo aumenta constantemente», confundía, al parecer, el Universo con el lenguaje cuántico.

24. La entropía y la dirección del tiempo.

Tras un siglo de termodinámica estadística sigue habiendo falta de unanimidad acerca de si es posible utilizar en forma consecuente la tendencia de S a aumentar para definir la dirección del tiempo, pese a la simetría bilateral de los procesos de la mecánica clásica y a la simetría bilateral de las probabilidades de la teoría cuántica. Veamos, pues, un ejemplo. Cuando se encuentra que la temperatura de un cuerpo es alta por un extremo y baja por el otro, en otro instante se halla que es la misma por todas partes y se sabe que el cuerpo se ha encontrado térmicamente aislado durante el intervalo temporal intermedio, asignamos, normalmente, el instante temporal anterior al estado de calor y frío, y el posterior al estado de temperatura igualada: podemos averiguar así la dirección del tiempo a partir de la de la entropía, ya que ambas son positivas simultáneamente. La cuestión reside, sin embargo, en si este paralelismo se mantiene en forma consecuente y universal, o, al menos, en la gran mayoría de los casos.

Consideremos primeramente un volumen finito que contenga un número finito de moléculas, que esté todo el tiempo aislado térmicamente y que se encuentre sometido periódicamente a una serie de observaciones (que se extenderán a lo largo de un lapso de tiempo infinito) relativas a la posición y velocidad de las moléculas; las probabilidades de distribución, P, y las entropías, $S = k \ln P$, correspondientes quedarían registradas en una película cinematográfica. (Suponemos que las observaciones no afectarán a las distribuciones y que será posible, efectivamente, averiguar estas últimas, lo cual constituye un caso sumamente idealizado de la teoría clásica.) La curva de la entropía que se obtenga mostrará muchos altibajos, pero la mayor parte del tiempo se encontrará cercana al máximo de S y sólo rara vez descenderá a valores de S bajos, como se hace ver en la famosa curva escalonada de P. y T. Ehrenfest (fig. 4); entonces, cuando se proyecte la película como un filme normal no se podrá decir si se la hace pasar por el proyector en el sentido correcto o al

revés, ya que la curva representativa de *S* posee, a lo largo de un intervalo temporal muy grande, una *simetría bilateral* general con respecto al tiempo: éste corre en una dirección, pero la entropía sube y baja. Verdaderamente, la defensa que hizo originalmente Boltzmann de que las probabilidades favorecen una unilateralidad de la evolución de la entropía se pone en tela de juicio en el argumento de Lohschmid de la inversión: cualquier movimiento de las moléculas que lleve a un aumento de *S* conducirá, por inversión de los movimientos moleculares, a la correspondiente disminución de *S*, y no existe preferencia mecánica de unos movimientos sobre otros. Y también tenemos el argumento de recurrencia de Poincaré-Zermelo: si se aguarda el tiempo suficiente, se encontrará una repetición, o casi repetición, de cualquier fragmento dado de la curva de *S;* pero el que se produzca una recurrencia de un fragmento ascendente de la curva de *S* entraña que exista un fragmento descendente entre los dos ascendentes, luego no puede haber un paralelismo sistemático entre la entropía y la flecha del tiempo. En la física cuántica se obtiene el mismo resultado negativo cuando se sustituye la «observación» por el «ensayo»: aun cuando, con gran probabilidad, cada ensayo lleva a un valor de *S* más elevado, la curva de esta magnitud obtenida realmente a partir de un número ilimitado de ensayos da lugar a una curva de *S* con fluctuaciones hacia arriba y hacia abajo, parecida a la de Ehrenfest y que muestra, como ésta, una simetría bilateral con respecto al tiempo.

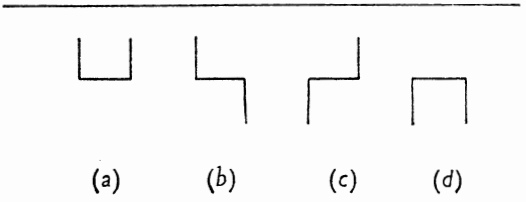

Figura 5

Para entender que, pese a ello, los valores bajos de la entropía sean mucho más raros que los elevados, Ehrenfest consideró la recurrencia a lo largo de la curva de *S* de los siguientes fragmentos de tres escalones (fig. 5): en el caso *a)* cierto valor bajo de *S* se ve precedido y asimismo seguido por un valor más alto (es el caso más frecuente); menos probables son los casos *b)* y *c),* en los que se pasa por el mismo valor bajo de *S* siguiendo un camino que en *b)* es descendente y en *c)* ascendente, pero estos dos casos tienen la misma probabilidad, que es mucho menor que la del caso *a);* y el más improbable es el *d),* en el que el mismo valor bajo de *S* antes considerado se ve tanto precedido como seguido por otro todavía inferior. Ahora bien, tanto *a)* como *d)* son

simétricos con respecto a $\pm t$, y lo mismo sucede con *b)* y *c)* tomados juntamente; de modo que, teniendo en cuenta las inversiones y las recurrencias, se advierte que no predomina un paralelismo general de la entropía y el tiempo, ni en la teoría clásica ni en la cuántica, cuando el sistema es finito ([7]).

En un sistema infinito, en cambio, habría que esperar un tiempo infinito a que se produjese una inversión o una recurrencia de una curva de S dada. Por ejemplo, un grupo de moléculas inicialmente condensado en el espacio puede dilatarse incesantemente en el espacio infinito, con lo cual su entropía aumentará sistemáticamente con el tiempo; y lo mismo sucederá con un universo de estrellas que se encuentre en expansión, suponiendo que ésta se efectúe en el espacio infinito.

En la vida ordinaria y en la termodinámica nos ocupamos de sistemas finitos, que llevamos deliberadamente a un estado de elevada entropía desconectándolos del resto del universo; de este modo, sí que tenemos un paralelismo entre el tiempo y la entropía (por lo menos durante un lapso de tiempo limitado), pero ello no demuestra que exista, en general, semejante paralelismo —esto es, para la totalidad de la curva de Ehrenfest—. Da la casualidad de que nosotros vivimos en un estado sumamente improbable del mundo, que evoluciona hacia otro más probable; pero si nuestro mundo no fuese sumamente improbable, no habría ningún «*nosotros*» para especular sobre él.

RESUMEN

Logramos resolver la paradoja de Gibbs introduciendo el concepto de grado de igualdad parcial, ya definido operacionalmente en el capítulo II. La reducción de las $N!$ permutaciones de N partículas idénticas a la unidad es tan fundamental para la teoría cuántica como la simetría bilateral de las probabilidades de transición, y precede a la interferencia de probabilidades y a la periodicidad de pq, de que hemos de tratar en capítulos posteriores. La simetría bilateral de la mecánica clásica es la principal barrera que se opone a la deducción de la Segunda ley [de la Termodinámica *(T.)*] a partir de una base clásica, en tanto que en la nueva mecánica la reversibilidad (= simetría bilateral) constituye el requisito previo a la irreversibilidad de los valores promedios. No obstante lo cual, ni la teoría clásica ni la cuántica permiten una definición *general* entrópica de la dirección del tiempo, y la tesis de que la entropía marcha paralelamente a la falta de información padece una confusión entre la información, esto es, información real, y la información teóricamente posible (que no es información).

CAPÍTULO VI

La interferencia de probabilidades

"Estoy convencido de que por pura construcción matemática podemos descubrir los conceptos y leyes que proporcionan la clave de la inteligencia de los fenómenos naturales."

EINSTEIN.

25. LA MÉTRICA DE LAS ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS.

En este capítulo nos vamos a ocupar de la interferencia o superposición de probabilidades, a la que se suele tener por una ley cuántica suprema, por una rareza de la Naturaleza que no cabe explicar a base de otros postulados más elementales. Haremos ver que la interferencia probabilitaria es una necesidad matemática dado el *no cuantista* postulado de que las probabilidades de transición de un estado a otro sean interdependientes de acuerdo con una ley general, en lugar de presentar un caos de entidades independientes; y la única ley general que vinculará las tablas cuadradas de suma unidad será la de transformación unitaria, que es formalmente idéntica a la ley de interferencia de la mecánica cuántica. De modo que esta última no es solamente un hecho, sino un hecho necesario.

Una persona ocupada en plegar triángulos de papel descubre que las tres alturas de todo triángulo se cortan en un punto, y que lo mismo sucede con las tres bisectrices, las tres medianas y las tres perpendiculares en los puntos medios de los lados; de lo cual concluye que ha descubierto un nuevo principio general, el de la «unidad en la triplicidad», que no sólo se confirma por la geometría, sino por la música, la arquitectura, las instituciones políticas, etc. Pero un matemático le haría saber, sin embargo, que tal unidad en la triplicidad geométrica no es un «principio» por sí, sino una consecuencia de los axiomas euclídeos, y que, por consiguiente, cabe entenderlo como una necesidad geométrica, en lugar de aceptarlo como una rareza cabalística con profundas implicaciones filosóficas. Análogamente, acaso quepa denotar el hecho empírico de que el comportamiento estadístico de las partículas presenta aspecto ondulatorio mediante la comprehensiva expresión de «dualidad de ondas y partículas»; sin embargo, cuando los físicos, tras medio siglo de física cuántica, si-

guen creyendo que la dualidad, juntamente con cierta complementaridad de los rasgos corpusculares y ondulatorios, revela un «principio» de la naturaleza fundamental e independiente, un rasgo inmanente del microcosmos que tiene ramificaciones en otros dominios del conocimiento humano ([1]), es el momento de detenerse y reflexionar acerca de si esta dualidad no sería reducible a unos axiomas físicos fundamentales sencillos y casi evidentes, de suerte que pidiéramos reconocer en ella más una necesidad que una rareza. En este orden de cosas, yo pienso que cabe estatuir unos postulados sencillos y elementales que expliquen *por qué* las manifestaciones corpusculares estadísticas han de obedecer a una ley de «interferencia de probabilidades» a través de una amplitud imaginaria compleja llamada ψ, y por qué los fenómenos se sujetan a $E = h\nu$ y a las demás reglas cuánticas: esto es, por qué las coordenadas y los momentos de las partículas han de encontrarse en una relación periódica de aspecto ondulatorio. Semejante reducción de lo extraño a lo natural es tanto más deseable cuanto que parece darse generalmente por supuesto el carácter pretendidamente misterioso de las reglas cuánticas, según salta a la vista, por ejemplo, en el aserto de P. Bridgman ([2]) de que «Cuando avanzamos suficientemente en dirección a la extrema pequeñez, la teoría cuántica dice que nuestras formas de pensar fallan, de modo que es cuestionable que, en absoluto, podamos pensar, en sentido propio», o en la declaración de Heisenberg ([3]) de que la magnitud ψ es «abstracta e incomprensible ... por así decirlo, en ella no hay física alguna». Con objeto de disipar el aura de incomprensibilidad que rodea a la esotérica magnitud ψ, consideremos primeramente una analogía geométrica.

Supongamos que en un número infinito de tarjetas encontramos escritos unos números positivos tales como $L_{AB} = 5{,}23$, $L_{BA} = 4{,}78$, etc., y entre ellos $L_{AA} = 0$, etc.; además, que las L son simétricas, o sea, que $L_{AB} = L_{BA}$ Sospecharemos que quien los haya escrito habrá utilizado cierto método de atribución de los números, de modo que el valor de L_{AC} se encuentre determinado, o, al menos, restringido en sus posibilidades, por los de L_{AB} y L_{BC}, y que la misma relación «triangular» se cumplirá en el caso de cualquier otra terna de tarjetas; es decir, si suponemos que $F(L_{AB}, L_{BC}, L_{CA}) = 0$, o bien, abreviadamente, $f(A, B, C) = 0$, representa la supuesta interdependencia, la misma fórmula habría de ser válida para cualquier otra terna de letras sin dar lugar a contradicción; y, en particular, de $f(A, B, C) = 0$, $f(A, B, D) = 0$ y $f(A, C, D) = 0$ se seguiría la consecuencia $f(B, C, D) = 0$ sin más que eliminar la A. Dicho de otro modo, la ley de interdependencia entre las L ha de ser *simétrica* en las tres letras, así como *transitiva,* por lo cual presentará un carácter de grupo; y vamos a llamar a esto la condición de *generalidad* de la ley de interdependencia. Estas restricciones solas no bastan para determinar

el método empleado por quien haya inscrito los números en las tarjetas; pero si se halla, además, que las L satisfacen la desigualdad

$$| L_{AB} - L_{BC} | \leqslant L_{AC} \leqslant (L_{AB} + L_{BC}), \tag{1a}$$

ello revela que la ley de las L las determina en forma unívoca, según puede advertirse mediante una imagen geométrica: imagínese que las letras *A, B, C, ...* representan puntos de un espacio euclídeo, nono, bi o *M*-dimensional, y que las L son las distancias entre los puntos.

Entonces cabe también formular la relación que cumplen las L de la siguiente manera: asociemos con cada $L_{AB} = L_{BA}$ (que será positiva) dos *vectores* opuestos, $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, de longitud $|\omega| = L$, y démosles las direcciones apropiadas para que satisfagan el teorema de adición triangular

$$\omega_{AB} + \omega_{BC} = \omega_{AC}; \text{ y como } \omega_{AB} = -\omega_{BA}, \text{ se tendrá } \omega_{AA} = 0; \tag{1b}$$

o bien, expresándolo de forma más simétrica:

$$\omega_{AB} + \omega_{BC} + \omega_{CA} = \omega_{AB} + \omega_{BA} = \omega_{AA} = 0. \tag{1c}$$

El teorema de composición vectorial es simétrico y transitivo, como se necesita en un teorema general de interdependencia, y ofrece un aspecto mucho más sencillo que la vinculación directa entre las propias cantidades positivas L, con las que habría que distinguir entre diversos casos, como sigue:

a) Si los puntos *A, B, C, ...* se distribuyen monodimensionalmente, a lo largo de una recta (o de una circunferencia), las dos longitudes L_{AB} y L_{BC} determinan L_{AC} en forma bivalente, ya que *C* puede estar situada a uno u otro lado de *B* y *A*. Sin embargo, las seis vinculaciones L existentes entre cuatro puntos, *A, B, C* y *D*, se encuentran en una relación fija, de suerte que cinco de estas L determinan la sexta, en virtud de un método matemático general que es simétrico en las letras y presenta un carácter de grupo (esto es, que puede extenderse a cualquier otro conjunto de puntos). Las L se encuentran en una relación *tetragonal*, de modo que las estructuras monodimensionales [que nos interesan *(T.)*] están apoyadas en cuatro puntos.

b) Si los puntos se encuentran en un plano (o en una superficie esférica), se tiene una relación *pentagonal* entre las *L:* cinco puntos están vinculados por diez distancias L, y cuando nueve de ellas están dadas, la décima está determinada en virtud de una ley unívoca de correlación que es simétrica en las letras *A, B, C, D* y *E*, y que se cumple para cualquier conjunto de cinco letras.

c) En tres dimensiones existe una ley hexagonal que relaciona las *L:* seis puntos están unidos por quince L, y catorce de ellas determinan unívocamente la decimoquinta.

Y así sucesivamente para espacios de mayor número de dimensiones, planos o de curvatura constante. Aun cuando las leyes de correlación de las L se vuelven cada vez más complicadas al aumentar las dimensiones, la sencilla relación vectorial (1b) se cumple con cualquier número de ellas.

Adviértase que la condición $L_{AB} = L_{BA}$ no incluye, como caso especial, $L_{AA} = 0$, frente a lo que ocurre con $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, que implica $\omega_{AA} = 0$; lo cual depende de que no puede haber una relación general *unívoca* entre tres L, y de que es preciso recurrir a las *cantidades auxiliares* ω, que no están unívocamente determinadas por las L correspondientes.

26. La métrica de las amplitudes probabilísticas.

Ahora podemos ya pasar al problema matemático de construir un teorema de interdependencia entre las matrices de P que determine (o, al menos, restrinja en sus posibilidades) los elementos de la matriz (P_{AC}) cuando estén dados los de (P_{AB}) y (P_{BC}), problema más difícil que el anterior. Desde luego, el teorema de vinculación «triangular» que buscamos ha de ser *general,* lo cual significará lo siguiente:

1) Si denotamos simbólicamente la interdependencia con $F(P_{AB}, P_{BC}, P_{CA}) = 0$, o, aún más brevemente, con $f(A, B, C) = 0$, la misma vinculación habría de existir para cualquier permutación de las letras A, B y C, es decir, el teorema tendrá que ser *simétrico* en las letras.

2) La interdependencia tendría que satisfacerse para *todas* las combinaciones de letras; de forma que de $f(A, B, C)$, $f(A, B, D)$, $f(A, C, D) = 0$ debería *seguirse* $f(B, C, D) = 0$ por eliminación de A. Estamos exigiendo, pues, que el teorema posea *transitividad.*

Vamos a llamar condiciones de *generalidad* a las de simetría y transitividad tomadas conjuntamente.

La primera pregunta que se nos ofrece es la de si en absoluto es posible formular una ley general de interdependencia de las matrices de P; y a ella se contesta positivamente por el método de construir una, precisamente (véase más abajo). La pregunta siguiente inquiere si el ejemplo que se haya construido constituye la *única* ley de interdependencia *posible* entre las matrices de P; y cabe mostrar la unicidad de la solución (cf. el apéndice 1). Obsérvese, por otra parte, que además de la propiedad de ser cuadrados de suma unidad, las matrices de P han de poseer elementos positivos y que satisfagan la condición de la simetría,

$$P(A_k, B_j) = P(B_j, A_k), \text{ juntamente con } P(A_k, A_{k'}) = \delta_{kk'}. \qquad (2)$$

Vamos a empezar la tarea de construcción de un teorema de interdependencia de las matrices de P. Con objeto de indicar que los miembros de las tablas de P son positivos y se encuentran comprendidos entre 0 y 1, introducimos la notación α^2 para P, siendo α un número real positivo o negativo compren-

dido entre —1 y +1 (de donde $\alpha = \pm \sqrt{P}$). La matriz (P_{AB}) presentará, así, el aspecto siguiente:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2(A_1, B_1)\ \alpha^2(A_1, B_2) \dots \\ \alpha^2(A_2, B_1)\ \alpha^2(A_2, B_2) \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{pmatrix} = (\alpha^2_{AB}) \cdot \tag{2a}$$

La suma de los elementos de cada una de las M filas y de cada una de las M columnas vale la unidad.

Hemos introducido la notación α^2 para P dado que sugiere inmediatamente una interpretación geométrica: hagamos que las letras $A_1, A_2, \dots, A_M$ representen M ejes perpendiculares entre sí (= ortogonales) en un espacio M-dimensional, y que las letras $B_1, B_2, \dots, B_M$ representen otro sistema de ejes ortogonales; entonces cabe interpretar $\alpha(A_k, B_j)$ como el coseno del ángulo entre los dos ejes A_k y B_j, ya que los cuadrados de los cosenos que se encuentren en cada matriz sumarán la unidad a lo largo de cada fila y de cada columna. Esta interpretación geométrica nos conduce a la solución del problema que teníamos planteado, esto es, el de encontrar un teorema *general* (simétrico y transitivo) de interdependencia que vinculase entre sí las matrices cuadradas de suma unidad: asóciese a cada P (que será positiva) una cantidad, $\alpha = \pm \sqrt{P}$, ya sea positiva o negativa, y enlácense las α por la fórmula de los cosenos,

$$\alpha(A_k, C_n) = \Sigma_j\, \alpha(A_k, B_j) \cdot \alpha(B_j, C_n), \text{ siendo } P = \alpha^2, \tag{2b}$$

conocida con el nombre de *transformación ortogonal*. Así se resuelve el problema de hallar un teorema general y coherente de interdependencia entre las matrices de P a la vez que se mantiene *invariante* su propiedad de las sumas unidad. Se puede escribir la relación (2b) con una notación más concisa, la de la multiplicación de matrices:

$$(\alpha_{AC}) = (\alpha_{AB}) \times (\alpha_{BC}), \text{ siendo además } (\alpha_{AA}) = (1), \tag{2c}$$

o bien en la forma simétrica siguiente:

$$(\alpha_{AB}) \times (\alpha_{BC}) \times (\alpha_{CA}) = (\alpha_{AB}) \times (\alpha_{BA}) = (\alpha_{AA}) = (1) \tag{2d}$$

por analogía con la adición vectorial, expresada en (1b) y (1c), con la que hemos resuelto el problema de la interdependencia de las cantidades L. El signo de cada $\alpha = \pm \sqrt{P}$, o sea, el que valga + ó —, no se fija de antemano; sin embargo, se encuentra sometido a las restricciones impuestas por la interdependencia entre las α que se expresa en (2, b, c).

Existe una generalización importante del esquema de la transformación ortogonal que asegura también la invariancia de la propiedad de las sumas unidad de las tablas de P, generalización llamada *transformación unitaria*. En ésta,

en lugar de unas cantidades reales positivas o negativas, α, se introducen cantidades complejas, y se escribe $P = |\psi|^2$; de este modo, si φ es una fase,

$$\psi = \sqrt{P}\, e^{i\varphi}, \text{ y a la inversa, } P = |\psi|^2 \tag{3a}$$

ψ ha de ser «hermítica», esto es, ha de cumplirse

$$\psi(A_k, B_j) = \psi^*(B_j, A_k). \tag{3b}$$

(El asterisco indica la cantidad compleja conjugada.) Las cantidades ψ han de satisfacer la relación que hemos presentado antes, en (2b), para las α; de modo que en la concisa notación matricial estarán vinculadas por la fórmula

$$(\psi_{AC}) = (\psi_{AB}) \times (\psi_{BC}), \text{ siendo además } (\psi_{AA}) = (1). \tag{4}$$

A cada una de estas cantidades complejas, ψ, le está asignado un factor de fase, $e^{i\varphi}$, que no está determinado por la correspondiente cantidad $P = |\psi|^2$; y las fases, φ, están sometidas a las restricciones impuestas por la interdependencia mutua expresada en (4). (Cuando se adoptan únicamente los valores $\varphi = 0$ y $\varphi = 180$ grados, se encuentra el caso particular de la transformación ortogonal.) La fase no tiene significado alguno para cada probabilidad P.

Dado que toda cantidad compleja, ψ, puede representarse geométricamente como un *vector situado en un plano* dotado de un eje real y otro imaginario, el teorema de la transformación unitaria (3a, 3b y 4), estipula que las raíces cuadradas de las probabilidades P pueden dibujarse mediante vectores situados en un plano, de modo que representen una especie de estructura bidimensional regulada por el teorema del producto de matrices, (4), por analogía con la ley de composición vectorial, (1c). Todo lo cual indica que la transformación unitaria es una solución posible del problema de hallar una ley de interdependencia que vincule las matrices de P.

Importa mucho asegurarse, sin embargo, de que la «interferencia» sea la única ley *general* posible vinculadora de las matrices probabilitarias, de suerte que quepa decir que constituye algo necesario, que *la Naturaleza no tiene otra opción* si es que ha de evitar el caos, y en el apéndice 1 damos la demostración de la unicidad. Podemos responder, pues, a la pregunta de *por qué interfieren las probabilidades* diciendo: no tienen otra opción posible si «quieren» obedecer a una ley general de interdependencia que sea sencilla y directa. (En el capítulo VII y el apéndice 3 responderemos a la pregunta concreta de por qué la naturaleza no se contenta con transformaciones ortogonales, que vinculan cantidades reales, α, sino que recurre a cantidades complejas, ψ.)

Adviértase que una probabilidad de transición cualquiera, $P(A_k, B_j)$, está tan poco «asociada con» una amplitud y una fase de aspecto ondulatorio como

lo está una varilla cualquiera de longitud L_{AB} con una dirección vectorial: es cierto que *cabe* dibujar P (y L) en cierta dirección y encajar así los correspondientes vectores ψ (y ω) dentro del esquema matemático de la transformación unitaria (y de la adición vectorial); pero la idea de que un *electrón* que viaje por el espacio es una «ondícula» con fase y amplitud se equivoca de medio a medio.

Podemos añadir las siguientes observaciones de índole matemática. La transformación unitaria, (4), tiene como característica el ser una estructura muy simple y general, incluso cuando se la formula explícitamente.

$$\psi(A_k, C_n) = \Sigma_j \psi(A_k, B_j) \cdot \psi(B_j, C_n). \tag{5a}$$

Aquí, A, B y C son tres observables *cualesquiera,* y los subíndices k, j y n indican *cualesquiera* de sus autovalores. Mas la tan simple estructura de este teorema general se echa a perder, sin embargo, cuando se lo especializa del modo habitual: a B se le da el sentido especial de energía, con autovalores E_j, y a C se la toma como coordenada de posición, q, mientras que se deja A sin especificar; con lo cual (5a) presenta el aspecto siguiente:

$$\psi(A_k, p_n) = \Sigma_j \psi(A_k, E_j) \cdot \psi(E_j, q_n). \tag{5b}$$

Después, por la continuidad de los valores de q, se omite el subíndice n, y además se elimina por completo la referencia al estado A_k, de modo que (5b) se escribe del siguiente modo:

$$\psi(q) = \Sigma_j a_j \psi_j(q) \tag{5c}$$

como *desarrollo* de la «función de estado» $\psi(q)$ a base de las autofunciones de la energía, $\psi_j(q)$, o como superposición de ellas. (Cabe tomar también para q la posición en el espacio y el tiempo, q, t.) Esta formulación puede ser conveniente a efectos prácticos, a modo de notación estenográfica; pero muchos tratados la adoptan como punto de partida y «principio de superposición», de manera axiomática, pese a que al estudiante le es muy difícil averiguar que esta «fea» suma especial no es sino una forma desfigurada del «bello» teorema general (5b), el cual, a su vez, puede, además, entenderse como consecuencia de ciertos postulados no cuánticos, según hemos hecho ver. Es verdad que el desarrollo histórico comenzó por la forma (5c), que aparecía en la mecánica ondulatoria de Schrödinger; parece, sin embargo, que quien haya de ser hoy un entendido tiene derecho a que se lo introduzca a la teoría cuántica por la directa y bella autopista abierta por la notación (5b), que es coherente y general, en vez de tener que luchar a lo largo de los erráticos y asistemáticos rodeos del desarrollo histórico de tal modo que sólo tras años de práctica se entere de

modo inteligente, y no mnemotécnico, de la estructura subyacente, tan simple y general.

27. La métrica de las probabilidades.

La analogía formal entre la ley de adición de los vectores ω, (1a), y la ley de multiplicación de las ψ, (4), va todavía más allá. Según ya hemos dicho antes, cuando cinco puntos situados en un *plano* se vinculan por medio de diez distancias, *L,* o de diez distancias al cuadrado, *P,* nueve de ellas determinan la décima *P;* y de un modo semejante, puesto que las ψ son números complejos que representan vectores en un *plano,* puede demostrarse que la ley triangular de las matrices ψ, (4), equivale a una ley de relación directa entre diez tablas de *P* (que vinculen cinco conjuntos ortogonales cualesquiera de estados, *A, B, C, D* y *E),* de modo que nueve cuadrados mágicos unitarios determinen unívocamente el décimo.

Esta propiedad matemática tiene consecuencias interesantes. Desde su comienzo mismo, la geometría plana ha consistido principalmente en la explotación de casos especiales de la relación unívoca existente entre diez longitudes de las estructuras planas que vinculan cinco puntos; y sólo alrededor del año 1900 se difundió la notación vectorial, pero sin que, pese a ello, proporcionase ninguna visión nueva de las relaciones geométricas. El desarrollo de la teoría probabilitaria en física ha seguido el camino opuesto: en este caso, tras un largo camino de tentativas y errores, se ha descubierto la ley triangular del producto, (4), aplicable a matrices de cantidades complejas, ψ, o sea, a vectores probabilitarios situados en un plano; y la misma ley de las ψ conduce a una ley directa que vincula diez matrices de *P* [como sucede en el párrafo *b)* del apartado 25, página 83]. Podemos sacar la moraleja de que la ley de interferencia de las amplitudes probabilísticas, ψ, no es ni más ni menos esencial para la intervinculación entre las probabilidades de transición *P* que lo ha sido la tardía introducción de los vectores para la geometría del plano. Desde luego, nadie pasará por alto el gran valor práctico de la ley de las ψ para encontrar relaciones cuantitativas entre las probabilidades *P* en aquellos casos en los que dé la casualidad de que, a partir de fuentes de conocimiento independientes, se sepan cuáles son las relaciones de fase de las amplitudes ψ correspondientes. [En particular, se conoce cuáles son para la función típica $\psi(q, p)$: véase el capítulo VII.] Es preciso no olvidar, sin embargo, que las fases (esto es, los ángulos directores) que aparezcan en una matriz determinada, (ψ_{AB}), carecen de trascendencia para las probabilidades de la matriz probabilitaria correspondiente, (P_{AB}), de igual modo que la dirección de una varilla determinada no

afecta en nada a su longitud: sólo cuando se quieran representar las relaciones entre, por lo menos, tres tablas probabilitarias, (P_{AB}), (P_{BC}) y (P_{AC}), o entre los tres lados de un triángulo, sólo entonces (y siempre que ello suceda) entrarán en funciones las leyes vectoriales.

Si se reducen las cantidades ψ a sus valores *reales*, $\psi = \pm \sqrt{P}$, o sea, si sólo se admiten dos direcciones opuestas a lo largo de una línea, la «transformación unitaria» degenera en «transformación ortogonal»; las tablas de P que se obtienen entonces siguen siendo cuadrados mágicos unitarios, pero de una clase especial, que es demasiado estrecha para las necesidades de la mecánica cuántica. En el capítulo VII quedarán claras las razones que hay para admitir amplitudes probabilitarias complejas, esto es, direcciones vectoriales situadas en un *plano* en lugar de estarlo sólo en una línea: bastará mostrar allí que las condiciones de invariancia de la mecánica así lo requieren.

Las probabilidades pueden usarse para calcular *valores medios*. Sean S_1, S_2, ..., los M valores que pueda posiblemente tomar el observable S, referente a cierto átomo, cuando se lo someta a ensayo con un medidor de S. Supongamos ahora que se somete primeramente a tal átomo —o al final, como veremos más adelante— a una medición de A, que proporcionará el valor A_k, y que luego sufre una medición de S; el resultado concreto que así se haya de obtener es incierto, pero el valor medio de S en caso de que el experimento se repita muchas veces (partiendo siempre de A_k) será:

$$S_{\text{medio}} = \Sigma_j \, P(A_k, S_j) \cdot S_j \, . \tag{6}$$

Podemos denominarlo valor medio de S *a partir de* —o contenido *en*— el estado A_k, y cabe expresarlo también de la forma

$$S(A_k, A_k) = \Sigma_j \, \psi(A_k, S_j) \cdot S_j \cdot \psi(S_j, A_k) \, , \tag{6'}$$

o, todavía más abreviadamente,

$$S_{kk} = \Sigma_j \, \psi_{kj} \, S_j \, \psi_{jk} \, . \tag{6''}$$

Igualmente podemos decir que es el valor medio de S *en la transición* de A_k a sí mismo, o, simplemente, «el valor de transición» de S de A_k a A_k. La última fórmula caracteriza matemáticamente al observable S como un *tensor* en el espacio M-dimensional de la transformación unitaria, tensor que tendrá diversos estados como ejes coordenados, S_j como valores principales y S_{kk} como componentes tensoriales con respecto a los ejes, k (o estados, k), en los que otro observable, A, tenga sus valores principales o autovalores, A_k. El tensor S posee también unos «componentes mixtos» con respecto a los ejes, k, que están definidos por

$$S_{kk'} = \Sigma_j \, \psi_{kj} \, S_j \, \psi_{jk} \tag{7}$$

y, con mayor generalidad, por

$$S_{kk'} = \Sigma_m \Sigma_{m'} \psi_{km} S_{mm'} \psi_{m'k'}, \tag{8}$$

con el caso especial de $S_{jj} = S_j$ y de $S_{jj'} = 0$. La amplitud probabilitaria, ψ, desempeña el papel del «tensor unidad». *Así pues, los cálculos de la mecánica cuántica se reducen matemáticamente a la teoría de las transformaciones de los tensores en el espacio unitario.* Puede muy bien introducirse en la mecánica cuántica el carácter tensorial de los observables mediante un axioma especial; pero la relación (6), cuando se la escribe de las formas (6′) y (6″), implica por sí misma tal carácter, sin necesidad de supuestos adicionales (trataremos algo más el cálculo tensorial en el apéndice 2). Por otra parte, una vez que se ha estatuido la transformación unitaria como elemento vinculador de los observables más corrientes (energía-momento, ubicación espaciotemporal, etc.), sólo se admiten ulteriormente para estudio por la mecánica cuántica aquellos observables y «estados» suyos que encajen en el esquema que hemos trazado: el estado de salud de un cuerpo no es, ciertamente, un «estado observable» en sentido cuántico, y no se somete a la transformación unitaria.

Suele considerarse desconcertante que las probabilidades de los procesos atómicos obedezcan a una ley de interferencia en lugar de hacerlo a una ley de adición; sin embargo, esta última no serviría ni siquiera en circunstancias ordinarias: un gato puede saltar fácilmente desde el punto A_k a diversos puntos, B_1, B_2, ..., situados a unos tres metros de aquél, y desde éstos a un punto, C_n, a unos tres metros de ellos, pero sin que tenga posibilidad de saltar directamente los seis metros de A_k a C_n; y, por consiguiente, sería completamente erróneo calcular esta última probabilidad (que tendería a cero) mediante

$$P(A_k, C_n) = \Sigma_j P(A_k, B_j) P(B_j, C_n) \text{ (errónea).}$$

Y como ley general esta fórmula es igualmente insatisfactoria, ya que habría de incluir, como caso particular, esta otra:

$$P(A_k, A_{k'}) = \Sigma_j P(A_k, B_j) P(B_j, A_{k'}) \text{ (errónea)}$$

cuyo primer miembro se anulará cuando $k \neq k'$, siendo así que el segundo miembro es una suma de productos positivos. Por otra parte, el hecho de que las probabilidades de los procesos atómicos obedezcan a una ley tan sencilla y general como la de interferencia significa que hemos llegado a un nivel muy fundamental del análisis teorético, y que hay pocas probabilidades de dar con un nivel subatómico aún más profundo (en contraposición a ciertos teóricos, que querrían buscar un estrato más profundo en el que nuestras leyes estadísticas actuales mostrasen estar arraigadas en leyes causales); pero la búsqueda de causas ocultas es una tentativa de reducir las leyes sencillas de la natura-

leza a otras complicadas e inventadas *ad hoc* (véase el apartado 43), cosa contraria a todas las normas del método científico.

De acuerdo con lo que hemos visto, la relación que existe entre las probabilidades a través de la sencilla ley de la interferencia de ψ no tiene que apoyarse en ningún «principio» de dualidad de onda y corpúsculo, ni en la hipótesis de que las partículas estén guiadas por leyes de aspecto ondulatorio a los sitios debidos. Y la interferencia de las probabilidades, lejos de ser desconcertante, es la única forma posible de vincular cuadrados de suma unidad por medio de una regla general de interdependencia.

Como ya hemos señalado, ninguna dirección o fase individual de un vector ψ tiene importancia física por sí misma: las cantidades complejas ψ, con las direcciones que tienen en el plano, únicamente valen para establecer una relación matemática entre diversas probabilidades de transición registradas y compiladas en tablas, (P_{AB}), etc., y observables mediante ensayos realizados con instrumentos macroscópicos (a los que llamamos concisamente medidores de A, medidores de B, y así sucesivamente); cosa que debería acabar con la idea de que cada función u onda ψ, que representa una fila de una matriz de ψ, tenga alguna sustancialidad física directa como «onda piloto» o «potencial cuántico» que «guiase» los acontecimientos (De Broglie, Bohm, Vigier), o que se expansione en forma gradual y ocasionalmente se reduzca en un brusco colapso (Heisenberg: véase el apartado 39). Pues la onda ψ no guía sucesos reales, como tampoco guía una tabla de mortalidad las defunciones que realmente acontezcan, ni tampoco se reduce, de igual modo que una tabla de mortalidad no se reduce cuando se produce un fallecimiento. Las ondas materiales estaban muy bien hace cuarenta años: verdaderamente, ellas inspiraron a los fundadores de la mecánica ondulatoria en la formulación de su maravilloso método de calcular los datos atómicos; pero esas mismas ideas, tras haberse impreso en los cerebros de toda una generación, oscurecen hoy más que aclaran la significación de aquello que es todo lo que pretende lograr la teoría cuántica, a saber: proporcionar fórmulas, tablas y otras reglas de correlación entre sucesos, en particular entre probabilidades de transición; y tales reglas deberían entenderse —y es posible hacerlo así— como *necesidades* derivadas de postulados fundamentales simples, en lugar de como rarezas.

Ha habido diversas tentativas ingeniosas de modificar o generalizar la teoría cuántica mediante la introducción de nuevas formas del álgebra matricial en las que la ley de asociación y la de conmutación se colocan a un nivel superior [consúltese P. Jordan ([4])], pero la cuestión es siempre si estos perfeccionamientos matemáticos representan nuevas posibilidades de poner en correlación tablas cuadradas mágicas unitarias. Si no es así, no soy capaz de vislumbrar

demasiadas posibilidades de que lleven a algún progreso en física cuántica, por muy interesantes que sean desde un punto de vista puramente matemático.

Por otra parte, acaso sea posible considerar el hecho de que los sucesos atómicos se rijan por la elemental ley de correlación que es la de transformación unitaria (mientras que los juegos ordinarios con dados y ruletas no lo hacen así) como signo de que los juegos cuánticos microfísicos se ocupan de sucesos verdaderamente fundamentales, que corresponden a partículas elementales, y no a complejos mecanismos heterogéneos.

28. Partículas idénticas y teorema de Nernst.

Hemos visto antes que la interferencia de probabilidades, a la que ordinariamente se considera como un rasgo cuántico típico, descansa en una base mucho más amplia: a saber, en el no cuantista postulado de que existe, en absoluto, una ley general de interdependencia entre las diversas probabilidades de transición. Encontramos una situación semejante en lo que se refiere a otro rasgo frecuentemente considerado cuantista, a saber, la «anticlásica» tendencia de las partículas, ya sea a agolparse todas en uno y el mismo estado (partículas de Bose-Einstein) o a expelerse una a otra del mismo estado (partículas de Pauli-Fermi); estos dos modos de interacción están estrechamente relacionados con el hecho de que la amplitud probabilística, ψ, en cuanto función de las posiciones de varias partículas idénticas, q_1, q_2, ..., sea una función simétrica o antisimétrica con respecto a las permutaciones de éstas; y se ha dicho que las reglas de simetría (véase más abajo) responsables de la estructura de los átomos, moléculas y cuerpos en general entrañan «ciertos aspectos de gran contenido filosófico, más allá de la comprensión del físico ..., que tiene que contentarse con aceptar las implicaciones sin esperanza de penetrar el misterio implicado» [Lennard-Jones ([5])]. Tratemos de reducir el «misterio» al sentido común, en particular al evidente hecho —que asimismo puede valernos de criterio de identidad— de que cualquier magnitud observable relativa a un sistema de partículas idénticas presenta el mismo valor con independencia de que la partícula a se encuentre en el lugar q_1 y la b en el q_2, o de que esta última se encuentre en q_1 y aquélla en q_2, es decir, al postulado de simetría probabilística,

$$P(a_1 b_2) = P(b_1 a_2) \ .$$

De la teoría de perturbaciones se sigue que las amplitudes ψ correspondientes, o sea, en lo que se refiere a un intercambio de lugares entre a y b, son

$$\begin{array}{ll} \text{o simétricas,} & \psi(a_1 b_2) = \ \ \psi(b_1 a_2) \\ \text{o antisimétricas,} & \psi(a_1 b_2) = -\psi(b_1 a_2). \end{array}$$

Las consecuencias que tienen en la constitución de la materia la simetría y la antisimetría son tremendas; pero el 'o ... o', en lugar de 'ambas', se sigue de la necesidad termodinámica de dividir por $N!$, que en este caso es 2!: recuérdese el apartado 21.

Todavía más sencilla es la demostración de que, en caso de tres (o más) partículas idénticas, *a, b, c,* ..., en interacción, ψ no puede ser simétrica con respecto a un intercambio de *a* por *b* y al mismo tiempo antisimétrica con respecto a uno de *a* por *c;* pues si así fuese tendríamos la sucesión de fórmulas

$$\psi(a_1b_2c_3) = \psi(b_1a_2c_3) = -\psi(b_1c_2a_3) = -\psi(a_1c_2b_3)$$
$$= +\psi(c_1a_2b_3) = +\psi(c_1b_2a_3) = -\psi(a_1b_2c_3)$$

Pero como el último resultado, $\psi(a_1b_2c_3) = -\psi(a_1b_2c_3)$, es contradictorio, ψ puede ser, o bien, simétrica con respecto a las tres (o más) partículas idénticas, o antisimétrica con respecto a todas ellas; cosa que significa, empero, que la clase de todas las partículas se subdivide en dos subclases: las que forman una ψ simétrica (partículas de Bose) y las que la forman antisimétrica (partículas de Fermi). Todo lo cual se sigue del postulado de que las magnitudes observables han de ser simétricas con respecto a cualquier permutación de partículas idénticas; dicho brevemente, de la definición de la identidad como indiscernibilidad. (No obstante lo cual, está lejos de ser evidente que el mundo contenga incontables billones de partículas idénticas.)

La interacción simétrica y la antisimétrica implican que las partículas situadas al extremo de una larga molécula, o a una distancia cualquiera, «sepan» qué están haciendo sus parejas idénticas en el otro extremo, de modo que sean capaces de hacer lo mismo en cuanto les sea posible (Bose-Einstein) o en modo alguno lo mismo (Fermi-Dirac). En cuanto a la comunicación mutua a grandes distancias, es preciso no olvidar que la mecánica no relativista da por supuesto que la interacción es instantánea, incluso a distancias planetarias o interestelares. La teoría relativista de la interacción entre diversas partículas cargadas se encuentra todavía en un estado exploratorio, tanto en la mecánica ordinaria como en la cuántica; y la teoría cuántica relativista tendría que explicar también por qué las partículas de espín semientero prefieren siempre el modo de interacción antisimétrico. Pauli y Klein han dado recientemente pasos muy importantes hacia la solución de este problema (6).

El teorema de Nernst, también conocido con el nombre de Tercer principio de la Termodinámica, está relacionado con la cuestión de la simetría o antisimetría de las funciones ψ de N partículas idénticas que constituyan un cuerpo. Cada estado de semejante cuerpo podría estar realizado por $N!$ funciones ψ, que conducirían a una «degeneración» de grado de multiplicidad $N!$, si no fuese

por el requisito de simetría, que reduce el número $N!$ a sólo *una* función ψ permitida, ya sea simétrica o antisimétrica.

Es menester no confundir el teorema de Nernst con la sencilla aseveración de que no se puede llegar jamás al cero absoluto, en que sería $T = 0$. Por lo demás, esta afirmación, de apariencia empírica, se convierte en obvia cuando se sustituye la artificial escala de temperatura absoluta, T, por otra más natural, $t = \log T$: en ella $t = -\infty$ representa a $T = 0$, y es evidente que no cabe llegar a $t = -\infty$: perseguir el punto del cero absoluto es emprender la caza de Aquiles a la inversa; Aquiles, desde luego, *alcanza* a la tortuga, y sólo el artificio de dividir un intervalo finito en un número infinito de etapas hace que parezca ser un hecho empírico sorprendente el que lo consiga; por el contrario, el físico, desde luego, no puede alcanzar $t = -\infty$, y sólo el artificio de concentrar el infinito intervalo de t en un intervalo finito de T hace que parezca ser un sorprendente hecho empírico el que realmente *no* consiga alcanzar su meta. De suerte que considerar la inaccesibilidad de $T = 0$ como una nueva ley de la termodinámica es algo tan engañoso como creer que el hecho de que Aquiles atrapara a la tortuga es una nueva ley de la cinemática. En realidad, sin embargo, Nernst recibió el premio Nobel por un descubrimiento físico relativo a los cuerpos que se aproximan al —evidentemente inaccesible— límite $T = 0$, a saber, el resultado experimental de que las entropías de los distintos estados de asociación y agregación de las partículas que formen el cuerpo de que se trate convergen hacia un valor *común* de la entropía, que difiere en unas cantidades *finitas* de las entropías correspondientes a temperaturas más elevadas; se trata de un enunciado empírico de gran trascendencia, pero no está completamente justificado llamarlo Tercer principio de la Termodinámica, ya que es consecuencia de los principios fundamentales de simetría que forman parte de la métrica general de las ψ.

Las propiedades térmicas de los sistemas mecánicos, en particular en las proximidades del cero absoluto, dependen esencialmente de las nuevas estadísticas: ya sea la de Bose-Einstein, que admite la simetría de las funciones ψ con respecto a la permutación de partículas idénticas, o su opuesta, la de Fermi-Dirac, que sólo admite funciones ψ antisimétricas, de acuerdo con el principio de Pauli de excluir la existencia de más de una partícula por estado. Tomemos como ejemplo un «gas» formado por tres partículas idénticas, a, b y c, distribuidas en tres estados a los que correspondan las energías E_1, E_2 y E_3. Si N_1, N_2 y N_3 son, respectivamente, los números de ocupación de tales estados, la energía total del gas será

$$E = N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3.$$

La entropía dependerá de la estadística que se le atribuya a través de $S = k \cdot ln\ P$, siendo P el número de posibilidades de obtener una distribución determinada, que tenga los números de ocupación N_1, N_2 y N_3; y ha de tenerse en cuenta que las permutaciones de partículas idénticas se cuentan sin restricción de acuerdo con la estadística de Maxwell-Boltzmann, no se cuentan como distintas en la de Bose-Einstein, de suerte que en ella forman *un* solo caso ($P = 1$), y de ellas sólo se admiten en la estadística de Fermi-Dirac las distribuciones para las que ninguno de los números N sea mayor que la unidad. Las tres últimas filas de la tabla siguiente dan los valores de P en cada una de las tres estadísticas (en las tres primeras filas figuran los números de ocupación):

N_1	3	0	0	2	1	0	0	1	2	1
N_2	0	3	0	1	2	1	2	0	0	1
N_3	0	0	3	0	0	2	1	2	1	1
M—B	1	1	1	3	3	3	3	3	3	6
B—E	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
F—D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La estadística clásica atribuye a la distribución $\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}$ el valor $P = 3$, ya que puede realizarse mediante una cualquiera de las tres distribuciones

ab	*ac*	*bc*
c	*b*	*a*
—	—	—

las cuales se cuentan como una sola según Bose-Einstein y no se cuentan por Fermi-Dirac. (El principio de exclusión es aplicable a partículas de espín semientero, en particular a los electrones.)

RESUMEN

Teniendo en cuenta la simetría bilateral de las probabilidades individuales de transición, *P*, se sigue que las tablas de *P* han de ser cuadrados de suma uno. Y si ahora se postula que debe haber una ley general de interdependencia entre las tablas de *P*, una ley simétrica y transitiva, de orden en lugar que de caos, no existe más que una solución matemática del problema: es la que recibe el nombre de *transformación unitaria*, y se vale de unas cantidades intermedias complejas, ψ, distribuidas en matrices que satisfacen el siguiente teorema del producto:

$$(\psi_{AC}) = (\psi_{AB})\,(\psi_{BC}), \quad \text{siendo } P = |\psi|^2.$$

(Esta vinculación triangular mediante matrices de ψ es equivalente a una vinculación pentagonal entre matrices de *P* análoga a la que se encuentra en la geometría plana, en la que diez longitudes, *L*, que enlacen cinco puntos de un pentágono están siempre relacionadas de tal modo que nueve de ellas determinan unívocamente la décima *L*.)

Traducida a la física, la transformación unitaria es idéntica a la *ley de interferencia de probabilidades* de la teoría cuántica; la cual, por consiguiente, resulta ser necesaria una vez admitido el postulado del orden en vez del caos para las probabilidades de transición: la ley de interferencia, pues, no tiene que introducirse como ley cuántica soberana. El resultado obtenido en este capítulo constituye el segundo paso encaminado a extraer las características cuánticas de una base no cuantista (el primero lo había sido el que la simetría bilateral de las probabilidades obligase a que las matrices de *P* sean cuadrados de suma uno).

CAPÍTULO VII

El origen de las reglas cuánticas

"Es frecuente entrar en el desconocido edificio de una disciplina científica nueva a través de un portillo que nos conduzca a un pasadizo lateral; y puede llevarnos mucho tiempo el dar con el camino a la entrada principal y contemplar el conjunto de la estructura en la perspectiva adecuada."

SCHRÖDINGER.

29. DEFINICIÓN DE CONJUGACIÓN DINÁMICA.

El presente capítulo se ocupa de las principales reglas cuánticas, $E = h\nu$ y $p = h/\lambda$ (o, en realidad, de su forma correcta, $\Delta E = h/T$ y $\Delta p = h/L$); y, en lugar de aceptarlas como fundamentales e irreducibles, haremos ver que son consecuencia de postular la invariancia de la mecánica con respecto a traslaciones del origen (invariancias de Galileo y de Lorentz).

Las reglas cuánticas que acabamos de mencionar, suplementadas por la regla de Bohr de la frecuencia de las líneas espectrales, $\nu = (E - E')/h$, constituyeron originalmente el «enigma cuántico». Actualmente las reglas cuánticas se extraen de otros teoremas generales todavía más problemáticos, como son la regla de conmutación de qp, de Born, la regla de Schrödinger del operador p y (como equivalente a estas dos) el teorema de que la función de la amplitud probabilística, $\psi(q, p)$, tiene la forma imaginaria compleja

$$\psi(q, p) = \text{C}^{\text{te}}. \exp(2i\pi qp/h), \qquad (1$$

o sea, es una función de onda de longitud de onda $\lambda = h/p$. En lugar de dársenos una explicación de todas estas extrañas reglas, se espera que las aceptemos tal y como suenan, «puesto que funcionan tan bien». Mas ¿será acaso posible extraerlas de una base más fundamental?

La respuesta tradicional a tal pregunta ha sido sumamente insatisfactoria: la función de onda (1) viene considerándose durante los últimos treinta y tantos años como prueba de la existencia en la naturaleza de un principio rector según el cual —por emplear las palabras de Newton— la materia (al igual de la luz) está «dotada de una cualidad oculta y específica por la cual actúa y pro-

duce efectos manifiestos», a saber, un dualista juego conjunto de propiedades ondulatorias y corpusculares, si bien atenuado por una complementaridad fundamental. Al cabo de tantos años ya ni se tiene la sensación de que sea problemático que la materia presente en unas ocasiones rasgos corpusculares y en otras rasgos ondulatorios; se nos dice que los chasquidos de los contadores de Geiger y los efectos Compton de retroceso sólo pueden explicarse en términos corpusculares, mientras que sólo podría darse cuenta de las franjas de interferencia de los experimentos de difracción con acciones ondulatorias; así, dice un tratado por lo demás excelente: «Los electrones, en lugar de tener leyes parecidas a las clásicas, obedecen a las leyes del movimiento ondulatorio, ... y la luz es de naturaleza corpuscular, por lo menos cuando entra en interacción con la materia»; parece realmente como si fueran ondas los lunes, miércoles y viernes, y partículas durante el resto de la semana (Bragg). Sólo unos pocos espíritus independientes, entre los cuales se cuentan Einstein, Schrödinger y De Broglie, se han negado tenazmente a plegarse a este «lío cuántico» como a algo definitivo.

En vez de aceptar la dualidad al pie de la letra, como una «cualidad oculta y específica», proponemos en el presente estudio «deducirla de dos o tres principios generales del movimiento» (con palabras de Newton). Uno de ellos ha sido el no cuantista postulado de que las probabilidades de transición, una vez dispuestas en cuadrados mágicos unitarios, están vinculadas por una ley general y coherente (capítulo VI); ley que no puede tener sino una forma concebible, a saber, la de la transformación unitaria, que es idéntica a una *interferencia* de probabilidades de aspecto ondulatorio; en cuanto al otro rasgo cuántico «oculto y específico», la relación periódica entre los observables dinámicos *conjugados* q y p, vamos a deducirlo en este capítulo.

La *conjugación* entre las cantidades q (= coordenadas) y p (= momentos) se ha definido de maneras diferentes en las mecánicas clásica y cuántica:

a) La *mecánica clásica* dice que q y p son conjugadas dentro de un sistema mecánico determinado, por definición, cuando las ecuaciones de movimiento

$$dq/dt = \partial H/\partial p \qquad \text{y} \qquad dp/dt = -\partial H/\partial q.$$

Esta definición se refiere a la energía y al tiempo, que representan, a su vez, una pareja conjugada. Así pues, la definición clásica es circular.

b) La *mecánica cuántica* suele decir que, por definición, q y p son coordenadas y momentos conjugados cuando satisfacen la regla de conmutación de Born, $qp - pq = h/2i\pi$, o la regla del operador de Schrödinger, $p = (h/2i\pi)d/dq$, o bien cuando dan origen a la función de onda (1). Pero las tres condiciones introducen la relación cuántica entre q y p por decreto, por lo cual atribuyen a la dinámica cuántica un régimen de teoría *ad hoc*.

Nuestra tarea consiste en extraer la dinámica cuántica, como consecuencia, de unos postulados sencillos no cuantistas, y, en particular, en obtener la rela-

ción periódica entre q y p sin introducir rasgos cuánticos especiales, tales como los de *b)*.

Una de las características de la mecánica es que siempre que se ocupa de un valor de una coordenada, q, tal valor se entiende que lo es por referencia a un punto cero u origen; de ahí que cuando haya que tener en cuenta dos valores, q y q', sólo su diferencia tenga significación física, y que la elección del arbitrario punto cero u origen quede cancelada en $q - q'$; lo mismo sucede con el momento, p, e igualmente con la energía, E, y el tiempo, t. Dicho brevemente, la mecánica presenta invariancia galileana. Para traspasar esta invariancia de la mecánica clásica a la cuántica introducimos ahora el postulado siguiente:

c) Todo observable $T(q)$ posee elementos matriciales (= valores de transición), $T_{pp'}$, que dependen únicamente de la diferencia $p - p'$; y, análogamente, todo observable $S(p)$ posee elementos matriciales, $S_{qq'}$, que sólo dependen de $q - q'$. Con respecto a E y t son válidos principios análogos.

Cabe utilizar el postulado *c)* como definición de la conjugación de p y q (y asimismo de E y t), en sustitución de la definición cuantista usual antes formulada, *b)*. Observamos que, frente a lo que ocurría con este último, el postulado *c)* carece de todo rasgo cuántico de periodicidad de pq: por el contrario, el tema principal del presente capítulo consiste en mostrar que a partir del no cuantista postulado de la invariancia de la mecánica con respecto a desplazamientos de los puntos cero, *c)*, se puede *deducir* que la función de la amplitud probabilística, $\psi(p, q)$, tiene que tener la forma periódica ondulatoria expresada en la fórmula (1); cosa que constituirá el tercer paso de la deducción de la mecánica cuántica a partir de una base no cuantista (*).

30. El origen de la función de onda.

La demostración de que $\psi(q, p)$ tiene que tener la forma periódica compleja (1) se apoya en la respuesta a la tercera de las siguientes preguntas:

1. ¿Qué función $\varphi(p)$ satisface $\varphi(p) + \varphi(p') = \varphi(p \cdot p')$?
Respuesta: la función logarítmica, ya que $log\ p + log\ p' = log\ (p \cdot p')$
2. ¿Qué función $\chi(p)$ satisface $\chi(p) : \chi(p') = \chi(p + p')$?
Respuesta: la función exponencial, ya que $e^p \cdot e^{p'} = e^{p+p'}$.

(*) La introducción de un denominador relativista, como se hace en la fórmula (6) de la página 160, conlleva una alteración de los fundamentos.

3. ¿Qué función $\psi(p)$ satisface $\psi(p)\psi^*(p') = \psi(p - p')$, en donde el asterisco puede o no significar la compleja conjugada?

Respuesta: la función exponencial compleja, e^{ip}, ya que $e^{ip}\ e^{-ip'} = e^{i(p-p')}$; con lo cual el asterisco indica conjugada.

En el apéndice 3 demostramos, con el pormenor matemático debido, que, apoyándose en el postulado *c)*, la función de amplitud probabilística, $\psi(p, q)$, tiene necesariamente que tener la forma compleja periódica

$$\psi(p, q) = C^{te} \cdot \exp(2i\pi pq/C^{te}) = \psi^*(q, p), \tag{2}$$

con una constante en el exponente que denotamos con la letra h; se trata de una función periódica en un espacio de q, con longitud de onda $\lambda = h/p$. En cuanto a la pareja conjugada E y t, se llega al resultado análogo

$$\psi(E, t) = C^{te} \cdot \exp(2i\pi Et/h) = \psi^*(t, E), \tag{3}$$

que es periódica en el tiempo, con período $\tau = h/E$.

Además, (2) y (3) conducen a las reglas cuánticas de intercambio del momento y de la energía (véase más adelante). Así pues, cabe extraer los teoremas cuánticos básicos (2) y (3), juntamente con las reglas cuánticas, de unos postulados generales no cuantistas de simetría e invariancia; y habría que cambiar la autoritaria afirmación de que «Sabemos hoy que las reglas cuánticas son consecuencias de un hecho básico de todos los sucesos atómicos: el dualismo de la imagen ondulatoria y de la corpuscular» en esta otra: «Sabemos hoy que las reglas cuánticas son consecuencias de un hecho básico de todos los sucesos, a saber: 1) la simetría bilateral de las probabilidades, 2) el postulado de la interdependencia general de las probabilidades y 3) la invariancia de la mecánica con respecto a los desplazamientos de los puntos origen».

No se dice nada nuevo al indicar que de la función periódica (1) se siguen la regla de conmutación de Born,

$$pq - qp = ih/2\pi \tag{4}$$

de la mecánica de operadores, y el operador especial

$$p = (ih/2\pi)\, \partial/_{\partial q} \tag{5}$$

de la mecánica ondulatoria; debe recordarse, sin embargo, que la regla de conmutación, con su aspecto enigmático, y el cálculo de operadores, en general, no son sino una forma estenográfica de escribir vinculaciones entre datos que podrían igualmente bien escribirse de forma menos simbólica y abstracta.

Adviértase, teniendo en cuenta que luego lo vamos a utilizar, que la fórmula general de transformación tensorial,

$$T_{pp'} = \Sigma_q\ \Sigma_{q'}\ \psi_{pq}\ T_{qq}\ \psi_{q'p}$$

se reduce para toda función $T(q) = T_{qq}\,\delta_{qq}$, en virtud de (2), a

$$T(p,p') = \int T(q) \exp\,[2i\pi(p-p')q/h)]\,dq\,. \qquad (6)$$

Se ha preguntado por qué todas las partículas tienen la misma constante de acción, h. A lo cual sólo podemos responder que si las diversas partículas estuvieran regidas por reglas cuánticas con constantes h distintas, no podría producirse ningún intercambio (cuantista) de energía y momento entre ellas: simplemente, hay un solo mundo, en lugar de diversos mundos independientes y entrelazados. Otra pregunta es: ¿por qué tiene h un valor tan pequeño, o sea, $6{,}54 \cdot 10^{-27}$ en centímetros, gramos y segundos? Respuesta: ello garantiza la validez aproximada de la mecánica determinista en las dimensiones macroscópicas, sin la cual no podría existir ninguna estructura orgánica (incluyendo al físico teórico).

Las observaciones que siguen podrán, tal vez, hacer más manifiesta la base no cuantista de la mecánica cuántica. El neutral postulado de que haya una ley general de interdependencia entre las diversas tablas probabilitarias conduce al rasgo concreto de la interferencia de probabilidades, cuya mejor forma de expresión se basa en las amplitudes probabilísticas ψ; con todo, la ley de interferencia es de escasa utilidad para la predicción o el cálculo de resultados experimentales: pues incluso cuando se averiguan experimentalmente las dos matrices de P (P_{AB}) y (P_{BC}), ello no basta para calcular la matriz (P_{AC}), debido a que las medidas de P correspondientes a las dos primeras matrices dejan indeterminadas las fases de ψ. Pero esta situación en que nos encontrábamos en el capítulo anterior mejora radicalmente en el presente: el no cuantista postulado que ahora añadimos, esto es, el de que la dinámica sea invariante con respecto a desplazamientos de los puntos origen en los espacios de q y de p, lleva a determinar *una* tabla o función ψ, la función de onda $\psi(q, p)$, y análogamente sucede con $\psi(E, t)$; mas una vez que se conoce, en virtud de la teoría, la función básica $\psi(q, t; p, E) = \exp\,[2i\pi(pq \pm Et)/h]$, cabe calcular todas las demás funciones ψ, tales como $\psi(A; q, t)$, $\psi(B; q, t)$ y, luego, $\psi(A, B)$, juntamente con los autovalores de los observables A y B (tras haber definido A y B como funciones de q y p y/o de E y t), por medio del teorema de la interferencia de las ψ; el cual, a través de los operadores p y E (véase más arriba), conduce a la ecuación de Schrödinger. No tenemos por qué entrar aquí en detalles, ya que estos métodos se estudian en los tratados; sin embargo, ha de notarse que las obras al respecto suelen admitir como axioma imposible de reducción ulterior la periodicidad de pq (así como la regla de intercambio de pq y la del operador p, que se siguen de ella), mientras que nosotros *extraemos* las reglas cuánticas de unos postulados generales no cuan-

tistas de simetría e invariancia; es decir, que los tratados comienzan donde acaban nuestros estudios.

Según mis noticias, el único otro intento de extraer las reglas cuánticas de una base no cuantista se debe a F. Bopp ([2]). Pero él introduce dieciséis postulados formales, algunos de carácter eminentemente matemático, en tanto que lo que nosotros pretendemos es introducir únicamente unos postulados fundamentales simples y plausibles que tengan una significación física manifiesta.

31. La periodicidad en una dimensión.

Las reglas cuánticas, $\Delta E = h/\tau$, $\Delta p_\varphi = h/2\pi$ y $\Delta p = h/L$, se consideraron inicialmente como principios soberanos, incapaces de explicación ulterior; mas, en realidad, no son otra cosa que unas consecuencias particulares de la métrica probabilitaria general de la transformación unitaria (interferencia de probabilidades) juntamente con los postulados de invariancia de la mecánica, que conducen a la periodicidad de $\psi(p, q)$ y a las análogas funciones $\psi(E, t)$ y $\psi(p_\varphi, \varphi)$. Vamos a extraer una regla cuántica para el momento de un cuerpo. Consideraremos primero el caso de un «cristal monodimensional», periódico a lo largo de la única dirección lineal q, de modo que los observables $T(q)$ que sólo dependan de q presentarán los mismos valores en q, en $q + l$, en $q + 2l$, etc. Por consiguiente, será posible desarrollar $T(q)$ en serie de Fourier con periodicidades lineales l/n:

$$\begin{aligned} T(q) &= \Sigma_n\, T_n \cos\,(2\pi nq/l + \alpha_n) \\ &= \Sigma_n\, \tfrac{1}{2} T_n \exp\,(+2\pi i n q/l \pm i\alpha_n) \end{aligned} \tag{7}$$

en la que el '$\pm$' indica una suma de dos términos, uno dotado de signo $+$ y el otro de signo $-$. Con objeto de averiguar cuál es la actividad de este cuerpo periódico en lo que se refiere al momento sustituimos (7) en (6), con lo que se obtiene

$$T(p,p') = \Sigma_n\, \tfrac{1}{2} T_n \int \exp\left[2i\pi \left(\frac{p-p'}{h} \pm \frac{n}{l}\right) q \pm i\alpha_n\right] dq \tag{8}$$

Como el integrando es periódico en q, la integral consta de sumandos positivos y negativos que se anulan mutuamente, a menos que el factor de q del exponente se haga cero; de suerte que $T(p, p')$ únicamente poseerá valores no nulos para diferencias

$$\Delta p = p - p' = \pm nh/l. \tag{9}$$

Para valores de Δp que no satisfagan esta condición, los valores de transi-

ción $T(p, p')$ se anularán. Y el significado físico de este resultado es el siguiente: desde un punto de vista dinámico, el cristal monodimensional considerado es un cuerpo que puede alterar su momento p en la dirección q solamente en cantidades cuantizadas, $\Delta p = \pm nh/L$, esto es, por múltiplos de la periodicidad básica a lo largo del eje q, L.

En el capítulo I hemos visto que la regla cuántica del intercambio de momento lineal conduce a una explicación completa de la difracción de electrones en unas direcciones determinadas, en virtud de la ecuación de Duane del equilibrio de momentos

$$2p \operatorname{sen} \theta = nh/l \qquad \text{(Duane)}, \tag{10}$$

que equivale a la relación de interferencia de ondas

$$2l \cdot \operatorname{sen} \theta = n\lambda \qquad \text{(Bragg)} \tag{11}$$

sin más que traducir el momento de la partícula física, p, a una longitud de onda, $\lambda = h/p$, de unas ondas de materia hipotéticas; con la diferencia de que la mecánica cuántica de la tercera regla cuántica elimina la necesidad de traducción o de doble manifestación de una vez para siempre (por más que pueda conservarse como cómodo puente ideológico para llegar rápidamente a los resultados buscados).

32. La periodicidad en tres dimensiones.

Un cristal tridimensional está compuesto de células básicas, caracterizadas por tres vectores fundamentales, a_1, a_2 y a_3, y llenas de materia de acuerdo con una distribución de la densidad que se repite en cada célula. La dirección de un conjunto de planos paralelos de la retícula se define por medio de un plano que pase por los extremos de los tres vectores n_1a_1, n_2a_2 y n_3a_3; y los números enteros n_1, n_2 y n_3 determinarán también la distancia entre planos sucesivos. La condición ondulatoria de Bragg (11) determina asimismo los ángulos concretos en que se produce la reflexión, de acuerdo con la teoría de la interferencia de ondas.

Cabe obtener los mismos ángulos mediante una construcción realizada sobre la «retícula recíproca», cuya célula básica está formada por los tres vectores fundamentales b_1, b_2 y b_3, que son perpendiculares a las paredes de la retícula espacial anterior y cuyas longitudes son recíprocas de las distancias (ortogonales) entre las paredes de las celdas de esta última retícula, d_1, d_2 y d_3, o sea, son

$$b_1 = 1/d_1,\ b_2 = 1/d_2,\ b_3 = 1/d_3$$

El vector que una el origen con un punto de la retícula recíproca será

$$R = k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3$$

siendo k_1, k_2 y k_3 números enteros. Puede verse en la figura 6 la retícula recíproca, con 0 como origen.

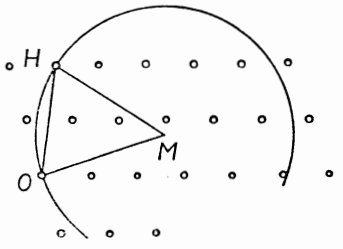

Figura 6

P. P. Ewald ([3]) ha indicado la siguiente construcción para la reflexión selectiva de las ondas incidentes, λ: trácese un vector, MO, de longitud $1/\lambda$ y paralelo a la dirección de las ondas incidentes, que pase por un punto, O, de la retícula recíproca; trácese luego una superficie esférica alrededor de M con radio OM; si esta superficie pasa por otro punto de la retícula recíproca (o muy cercana a él), por H, por ejemplo, trácese el vector MH, que representará una dirección de los rayos reflejados, siendo MO la de los incidentes. (Mediante consideraciones geométricas se hace ver que esta construcción es equivalente a la de Bragg.)

Cabe interpretar la construcción de Ewald como la construcción de un espacio de momentos sin más que multiplicar todas las dimensiones del diagrama de la figura 6 por el factor h; y entonces el vector MO representa el momento de la partícula incidente, cuyo valor es h/λ, mientras que MH es el vector representativo de su momento tras haber reaccionado con el cristal. El valor del momento de la partícula permanece invariable en esta reacción, y sólo cambia su dirección, de acuerdo con la ecuación vectorial de los momentos, $MO + OH = MH$; de ahí que OH represente el vector momento adquirido por la partícula. Por consiguiente, podemos decir que un cristal es un sistema mecánico capaz de comunicar (o recibir) únicamente los momentos orientados que quepa representar por líneas de unión entre dos puntos cualesquiera de la retícula recíproca multiplicadas por h. Vemos que las dos descripciones del cristal, esto es, como una distribución espacialmente periódica de materia y como un sistema mecánico capaz de comunicar y de recibir momentos vectoriales únicamente por valores cuantizados, son equivalentes; sin embargo, de acuerdo con la teoría corpuscular unitaria de la materia, sólo la segunda descripción

presenta de un modo realista la difracción de la *materia:* la descripción ondulatoria se ocuparía de amplitudes probabilísticas de partículas materiales, no de ondas reales. (No podemos tratar ahora de los fotones frente a las ondas luminosas, ya que ello nos obligaría a entrar en detalles de la teoría cuántica de campos.)

La construcción de Ewald y su interpretación mecánica tras la multiplicación por el factor h se identifican con la tercera regla cuántica de la mecánica (de Duane). Una vez más, el hecho de que no se haya advertido jamás la importancia de esta regla para una *interpretación* corpuscular *unitaria* de ciertos fenómenos de aspecto ondulatorio, tales como la difracción a través de dos ranuras en virtud de los componentes espaciales periódicos del dispositivo difractor, es uno de los fenómenos más extraños de la historia de la teoría cuántica.

33. La periodicidad temporal.

La mecánica usual nos dice que la energía, E, y el tiempo, t, desempeñan el papel de observables conjugados, análogamente a lo que sucede con p y q. Así pues, basta sustituir p por E y q por t en las fórmulas a que hemos llegado antes para obtener nuevas consecuencias de nuestros no cuantistas postulados. La primera conclusión es que la función de amplitud $\psi(E, t)$ ha de tener la forma

$$\psi(E, t) = \text{const} \cdot \exp(2i\pi Et/h) \tag{12}$$

Supongamos, además, que los observables de cierto objeto que sean funciones de t tienen la sencilla forma armónica que sigue:

$$T(t) = T_0 \cdot \cos(2\pi\nu t + \alpha)$$

A un objeto de esta índole se lo llama «oscilador armónico» de frecuencia ν. Otro objeto (un átomo) puede tener observables $T(t)$ de forma más compleja, tal como

$$T(t) = \Sigma_n T_n \cos(2\pi\nu_n t + \alpha_n) \tag{13}$$

Cuando se sustituye este último valor en la integral

$$T(E, E') = \int \psi(E, t)\, T(t)\, \psi(t, E')\, dt$$

se llega al resultado —análogo al (9)— de que $T(E, E')$ sólo posee valores no nulos para diferencias

$$\Delta E = E - E' = \pm h\nu_n \tag{14}$$

que es la condición de Bohr de las frecuencias. Así pues, cuando observamos el espectro de emisión o de absorción de tal objeto (átomo), ν_1, ν_2, ν_3, ..., podemos inferir de él la existencia de un conjunto de niveles de energía, que es el que dará origen a las frecuencias observadas de acuerdo con la condición de Bohr. Por otra parte, (1) y (12) juntas llevan a las prescripciones cuánticas de Born y Schrödinger, a las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, a las apariencias ondulatorias, y a todo lo demás; de suerte que si es que todas estas cuestiones se encontraban en otro tiempo más allá de nuestra inteligencia, si eran «enigmas», ahora se han visto resueltas por reducción a unos postulados no cuantistas casi evidentes.

Algunos autores han visto una grave paradoja ligada a la regla cuántica de Planck en la contradicción existente entre los cambios *repentinos* de energía de un oscilador $\Delta E = h\nu$, y la *duradera* vibración luminosa iniciada por aquéllos. Mas es preciso que subrayemos que la relación de Planck no implica que se produzca un cambio repentino de energía en el oscilador, sino que describe el resultado de una interacción entre el oscilador ν y una componente de campo, ν, extensa en el espacio: existe una gran *probabilidad* de que la reacción lleve a cambios de energía de valor $\pm h\nu$ en los dos participantes cuando se los observe tras su separación (véase la nota de la pág. 26).

RESUMEN

Las reglas de periodicidad cuántica que vinculan las coordenadas y los momentos, así como la energía y el tiempo, se siguen de los siguientes supuestos:

a) Admítase que las dos cantidades p y q varían entre $-\infty$ y $+\infty$, así como que las componentes T_{pp}, de todo tensor $T(q)$ del espacio de la transformación unitaria dependen exclusivamente de la diferencia $p - p'$, y que las componentes S_{qq}, de todo tensor $S(p)$ dependen sólo de $q - q'$; todo ello lleva a la conclusión de que el tensor unitario ψ posee componentes mixtas $\psi_{qp} = \psi(q, p) = C^{te} \cdot \exp(2i\pi qp/C^{te})$; y análogamente para E y t.

b) Identificamos las cantidades q y p, respectivamente, con las coordenadas lineales y los momentos lineales conjugados, y los tensores S y T con observables. La constante de la función exponencial ψ lleva el nombre de constante de acción de Planck, de suerte que $\psi(q, p)$ es una "función ondulatoria" de longitud de onda $\lambda = h/p$.

El aspecto ondulatorio de la periodicidad cuántica queda explicado, pues, como consecuencia de las características de q y p que conocíamos ya por la

mecánica clásica: a saber, la *invariancia* con respecto a la transformación de Galileo, juntamente con el teorema general de la transformación unitaria (el cual da lugar por sí solo a una ley de vinculación general entre las tablas de *P*, que, a su vez, en cuanto que tienen la propiedad de ser cuadrados de suma unidad, se apoyan en la *simetría* bilateral de las probabilidades de transición).

Capítulo VIII

Hechos y ficciones de los cuantos

"La historia de toda ciencia está sembrada de huesos de dogmas, propuestos por hombres de ciencia excepcionales y aclamados general y entusiásticamente, durante algún tiempo, por los miembros menos emprendedores de la disciplina."

R. LAPIERE.

34. Observaciones sobre el método.

Existe actualmente consenso entre los expertos en lo que se refiere a la resolución real de los problemas atómicos por los métodos matemáticos de la mecánica cuántica: las diferencias han surgido únicamente con respecto a la interpretación y la ideología. Pero la ideología es un asunto muy serio para el versado en la cuestión y para el público interesado en general: pues uno quiere entender concretamente por qué es preciso recurrir al desconcertante formalismo matemático del álgebra no conmutativa y de las funciones imaginarias complejas, que tanto éxito han tenido en la tarea de coordinar fenómenos diversos de los dominios microfísicos. Tras habernos ocupado en el capítulo I de la ideología dualista y de su rechazo por la mecánica cuántica unitaria de partículas, vamos a emprender una guerra fría contra otras muchas nociones surgidas durante la creadora etapa comprendida entre 1920 y los primeros años de la década de 1930, nociones que han mostrado tener una notable capacidad de permanencia pese a su problemático carácter, y que se encuentran ahora sancionadas por la autoridad y la tradición hasta el punto de que se despacha a la crítica con un encogerse de hombros, como si pensase cosas impensables. La claridad ha quedado especialmente oscurecida merced a un enfoque lingüístico de los problemas de la interpretación física, de suerte que se alaba a Niels Bohr por haber sido el único que habría «sabido que el verdadero problema ... de eliminar las contradicciones ... residía en alquitarar el *lenguaje* de la física» (cf. el apartado 44); y, por el otro extremo, ha existido cierta inclinación a ver la esencia de la ciencia atómica en los abstractos símbolos matemáticos y en su manipulación, según lo expresaba Eddington: «Nos hemos dado cuenta de que la exploración del mundo exterior por los métodos de la ciencia física

no conduce a una realidad concreta, sino a un umbrátil mundo de símbolos ... que es uno de los avances recientes más importantes, de modo que el *homo sapiens* sólo encuentra la propia huella de su paso en la arena». No se explica, sin embargo, cómo podría el hombre haber desarrollado su dominio técnico de las fuerzas naturales a partir de tal modo de sombras simbólicas, ni siquiera cuando nos enteramos por otra fuente que sólo la ciencia *moderna* se ha convertido en un mundo de símbolos: «El primer paso de la retirada de la ciencia de la explicación mecánica se dio en 1900, cuando Max Planck ...», etc.: como si $E = \frac{1}{2}mv^2$ fuese explicación mecánica, en tanto que $E = h\nu$ fuese retirada a la abstracción matemática. Sin embargo, ya sea retirada o avance, un umbrátil mundo de símbolos significaría una inversión completa de la ciencia natural, cuyo objeto era (y sigue siendo), una vez supuesto que exista un mundo real independiente de la opinión y el consentimiento humanos, buscar regularidades generales que puedan valernos para manipular las cosas y los sucesos. Los filósofos han suscitado la cuestión de cómo podríamos llegar a tener conocimiento ninguno de un «mundo exterior» sin ingredientes mentales; y el que se hayan inclinado hacia el idealismo, el positivismo u otros ismos es algo que está más allá de la física; pero parece ocioso apelar dentro de la física a una doctrina filosófica con objeto de encontrar una vía de escape fácil a un problema puramente científico tal como el de si la materia consiste realmente en partículas o en ondas. Se ha preguntado que qué queremos decir al hablar de que las partículas materiales son reales y las ondas de materia meras apariencias; pues bien, para el científico, una «cosa real» se caracteriza por ciertas propiedades constantemente recurrentes: así, un electrón, con su carga, su masa y su espín discretos y concentrados, es una cosa real, mientras que la curva probabilística o función ψ que describa el albur atribuible a sucesos futuros no es una cosa real, por mucho que la curva tenga aspecto ondulatorio. Empleando el excelente lenguaje del doctor Johnson: se puede dar un puntapié a una piedra, e igualmente puede dárselo a un electrón, y hasta a una ola y una onda electromagnética, así como ser golpeado por todo ello, lo cual prueba su «realidad»; pero no es posible dar un puntapié a una curva de aspecto ondulatorio que represente probabilidades de sucesos, ni ser golpeado por ella. Y a los futuros historiadores de la ciencia les va a ser muy trabajoso entender cómo los físicos cuánticos de hoy día, bajo el incesante tiro de barrera del dogmático pseudoempirismo de sus caudillos, se han vuelto ciegos para tan sencilla distinción entre lo real y lo aparente dentro de su propia ciencia.

Si se admite la interpretación estadística de Duane y Born, la mayoría de las profundidades filosóficas destinadas a justificar la ilusión de la dualidad son superfluas; y así vuelve uno desde las imágenes subjetivas y el simbolismo umbrátil a la física lisa y llana, y habla sin avergonzarse de los electrones como

de cosas reales, prescindiendo de pulidos filosóficos. Por otra parte, si bien criticamos severamente a Bohr y a Heisenberg por su enfoque subjetivista, su alquitaramiento del lenguaje y sus ocasionales desviaciones de la lógica y la consecuencia, apenas será necesario añadir que la admiración que les tengo por sus hazañas en física teórica es tan grande como siempre lo ha sido. Pero tengo que confesar que, a lo largo de los muchos años durante los cuales he tratado de imbuir a mis alumnos el «espíritu de Copenhague», me veía a mí mismo cada vez más como un abogado del diablo, y padecía una desazón intelectual que crecía sin cesar; y he de añadir asimismo que, si bien en las consideraciones de este último capítulo va a estar resonando una y otra vez, como un *basso continuo*, la tercera regla cuántica, la de Duane, tal vez pueda pedirse indulgencia por ello al lector basándose en que durante las tres últimas décadas se ha dejado fuera de consideración, con toda constancia, esta fundamentalísima ley cuántica en docenas de simposios, montones de libros técnicos y populares, cientos de artículos especializados y miles de aulas, con resultados catastróficos para la interpretación de la teoría atómica, que han acabado en un «tremedal de evasión» —empleando la famosa frase de William James—. Citemos sólo un breve ejemplo: el destacado filósofo cuántico alemán Von Weizsäcker [1] ilustra a sus lectores diciendo que «Hoy sabemos que [las leyes cuánticas, $E = h\nu$, etc.] son una consecuencia del hecho básico de todos los sucesos atómicos: el dualismo de la imagen ondulatoria y la corpuscular»; pero, incluso aunque fuese verdad que pudiera demostrarse que las leyes cuánticas sean consecuencia de la dualidad, ello mostraría solamente que ciertas leyes físicas se siguen de una insoportable antinomia que, según sabemos hoy, *no* es un hecho básico. Ni tampoco es la antinomia de la dualidad una consecuencia de las leyes cuánticas unitarias.

35. Dualidad y doblez del pensamiento.

Ha habido varias tentativas de construir una teoría unitaria de la materia, de las cuales la más notable ha sido la teoría ondulatoria unitaria de Schrödinger, que descansa en la idea de que lo que parece ser una partícula sería, en realidad, la elevada cresta de una onda. Verdaderamente, según la ecuación de ondas, semejante cresta se mueve a lo largo del mismo recorrido y con la misma velocidad que lo haría una partícula que se moviese de acuerdo con las ecuaciones de la mecánica; el inconveniente reside en que una cresta de onda muy elevada se achata al cabo de corto tiempo, y de este modo pierde la concentración que la asemejaba a una partícula; por lo cual hubo que abandonar esta idea. La contrapropuesta, o sea, una teoría unitaria de partículas mecáni-

cas, preparada por la explicación mecánica de Duane de la difracción, volvió a afirmarse por Born en su interpretación general estadística de la función de onda de Schrödinger. Actualmente apenas habrá físico alguno que se oponga a la interpretación de Born; y, sin embargo, sucede el extraño fenómeno de que muchos teóricos rindan culto con la boca, en sus horas libres, a la arcaica idea de que los corpúsculos y las ondas de materia son imágenes que se encuentran a la par, en lugar de conceder que aquéllos son, de acuerdo con la mecánica cuántica moderna, los verdaderos constituyentes de la materia, y que las ondas son meras apariencias producidas por la cooperación estadística de muchas partículas.

Acaso la resignación ante una inescrutable dualidad de manifestaciones haya valido para tranquilizar a una generación anterior en su desesperación ante una aparente antinomia; pero luego aquella resignación provisional se ha convertido en un nuevo credo, fomentado particularmente por las famosas conferencias de Chicago de Heisenberg ([2]), de 1930, a las que acompañaban, como ilustración, dos fotografías, una que mostraba trayectorias corpusculares en una cámara de niebla y la segunda que presentaba una figura de difracción electrónica con sus máximos y mínimos de intensidad. Sin embargo, apenas puede hacerse demasiado hincapié en que tales máximos son el resultado de impactos de partículas individuales en distribución estadística, de forma que *el segundo documento exhibido por Heisenberg prueba precisamente lo contrario de lo que se pretendía que probaba:* confirma la interpretación de Born de los fenómenos materiales de aspecto ondulatorio mediante una estadística de corpúsculos; y ya no se necesita para nada la dualidad («*Je n'ai pas besoin de cette hypothèse* [No tengo necesidad de tal hipótesis]», dijo en otra ocasión Laplace). El aferrarse al dualismo viola una de las reglas principales del pensamiento metódico: no caigamos en falsas oposiciones; no montemos una antítesis entre una cosa —un haz de propiedades— y *una* de tales propiedades; no contrapongamos a una serpiente, en cuanto cosa, su ocasional forma ondulada con objeto de defender una dualidad de sustancias en la serpiente. Sin embargo, los teóricos cuánticos no cumplen las normas lógicas cuando proclaman una oposición entre las partículas, en cuanto sustancia de la materia, por un lado, y la ocasional disposición estadística ondulatoria de esas mismas partículas, por otro. Si los expertos se aferran al lenguaje al que estén acostumbrados y emplean métodos alternantes para fines heurísticos, no hay en ello mal alguno; pero la constante insistencia en una ilógica antinomia no fomenta la claridad, como revela una ojeada a la bibliografía; así, sir James Jeans, en su alocución presidencial a la *Royal Society,* decía en 1934 ([3]): «La imagen corpuscular es una imagen materialista de la que se proveen quienes quieren ver su universo dibujado como materia existente en el espacio y el tiempo; y la imagen ondulatoria es una

imagen determinista de la que se proveen los que preguntan qué va a suceder inmediatamente después. La imagen ondulatoria, confirmada por la observación en todos los experimentos conocidos, presenta un determinismo completo ..., pero éste lo es de ondas, y por ello, en última instancia, de conocimiento. En cuanto a la conservación de la energía, las ondas de conocimiento no es probable que presten sumisión a tal ley». No vamos a reprochar a Jeans su distinguida aportación a la confusión general prevaleciente hace treinta años; pero en 1957, cuando la nube de polvo debería haberse sentado ya, leemos en otra alocución presidencial ([4]): «Sólo podemos conocer plenamente los pormenores de la mitad de las cosas del mundo, ... y esto quiere decir que no podemos idear jamás un experimento que nos diga: esto es una partícula y no una onda; o viceversa». En realidad, para los que se han enterado de la tercera regla cuántica, todo experimento, incluyendo el de la difracción de la materia, dice: esto es una partícula y nada más; y la teoría de la mecánica cuántica dice lo mismo.

Mirando a través de unas gafas bifocales, Von Weizsäcker ([1]) lo expresa de este modo: «¿En qué respecto difiere la mecánica cuántica de la física clásica? Ha descubierto que el mismo objeto físico, por ejemplo, un electrón, aparece en dos formas de aspecto distinto ... onda o partícula ... fotografías de la cámara de niebla frente a interferencia ... Ahora bien, ¿qué sentido puede tener la afirmación de que un electrón es a la vez partícula y campo?». La respuesta lógica a esta cuestión es que ningún sentido, en absoluto, ya que el electrón *es* una partícula, pero el comportamiento estadístico de muchos electrones no es lo que es un electrón. Más adelante mantiene el mismo autor: «El mismo átomo se comporta en unos experimentos como una partícula, confinada espacialmente, y en otros como si llenase todo el espacio»; si esto fuese lo que dice la voz de la ciencia, sería verdaderamente alarmante; mas, en realidad, Von Weizsäcker no hace más que repetir el catecismo de una generación anterior, y desconoce la lección científica de Duane y de Born: pues, verdaderamente, según la física *moderna,* los átomos y los electrones son partículas no solamente en virtud de tener concentradas sus cargas y masas, sino que incluso en sus manifestaciones estadísticas se comportan exactamente como deberían comportarse unas partículas; ya que, por más que la interferencia presente un aspecto ondulatorio, constituye una necesidad, dada la mecánica cuántica probabilística de partículas (capítulo VII). Y cuando Von Weizsäcker declara finalmente que «La ley de Planck $[E = h\nu]$ es la expresión de la relación entre dos imágenes», se encuentra, como Rip van Winkle, por lo menos dos generaciones atrasado: pues ya en 1900 nos enseñó Planck que $E = h\nu$ *no* expresa una relación entre dos imágenes, sino que representa un hecho *físico* fundamental, a saber, que un sistema con período T altera su energía sólo por cantidades

$\Delta E = h/T$; pocos años después, Sommerfeld y Wilson descubrieron el fundamental hecho físico de que un sistema de periodicidad angular 2π altera su momento angular únicamente por cantidades $\Delta p = h/2\pi$ (por cierto, a uno le gustaría saber si también esta regla expresa una relación entre dos imágenes y cuáles son éstas); finalmente, en 1923 añadió Duane la tercera regla, según la cual los cuerpos con periodicidad lineal L en el espacio alteran su momento lineal por cantidades $\Delta p = h/L$. Si esta bien última regla se perdió en un batiburrillo de interpretaciones subjetivas, cabría esperar que al menos las dos primeras reglas cuánticas se reconocieran como leyes objetivas de la física, en lugar de considerarlas relaciones entre dos imágenes.

Es verdad que inicialmente no había ninguna explicación satisfactoria de tales reglas, y que constituían, por tanto, el «enigma cuántico». Pero Von Weizsäcker va mucho más adelante y nos dice que «En la teoría cuántica estas relaciones desempeñan el papel de axiomas sugeridos por la experiencia, pero por lo demás no se las puede deducir de otras leyes»; así pues, todo va perfectamente: *no molesten.* En realidad, como hemos visto en los capítulos anteriores, es perfectamente posible deducir las reglas cuánticas de intercambio de la energía y el momento a partir de otras leyes. (Si hemos escogido a Von Weizsäcker para estas críticas, ha sido únicamente porque se supone que habla con autoridad, por ser discípulo de Heisenberg y últimamente versado en filosofía de la ciencia.)

Por extraño que parezca, incluso Max Born, a quien debemos la interpretación estadística de la función ψ de Schrödinger como amplitud de una probabilidad relativa a *partículas,* hace trasnochadas concesiones al dualismo; así, en un artículo sobre «La realidad física», de 1959 ([5]), señala que el concepto popular de cosa real exige la presencia de ciertos rasgos que se conserven, concebidos como una *Gestalt* en la vida ordinaria y como cantidades invariantes en la física: «Los invariantes son los conceptos de los que la ciencia habla de la misma forma que el lenguaje corriente habla de las 'cosas', y a los que asigna nombres como si fuesen cosas corrientes»; los electrones son cosas reales por presentar masa en reposo, espín y carga invariantes, aun cuando, *al parecer,* no tendrían simultáneamente posición y velocidad (pero véase el apartado 37); y del mismo modo las olas son cosas reales; pero luego continúa Born diciendo: «Entonces, ¿por qué habríamos de suspender el epíteto de 'reales', por más que las ondas sólo representen en la teoría cuántica una distribución de la probabilidad?». A lo cual respondería yo que por la misma razón por la que las personas enfermas son cosas reales, en tanto que la curva de aspecto ondulatorio que simboliza la probabilidad de que una persona caiga enferma durante una epidemia fluctuante no es una cosa real: considerar que una curva ondulada de una enfermedad es una cosa tan real como una persona

enferma, y hablar de la «simetría» de las curvas nosológicas y de las personas enfermas carece de sentido. En los dominios cuánticos, sin embargo, la declaración de «por qué habríamos de suspender el epíteto de 'reales' ...», etc., suscita un confortable claroscuro, que da la impresión de estar en juego una ambigüedad elusiva pero profunda que habría que proteger a toda costa de la crítica profana. Véase la incisiva crítica de W. Yourgrau ([25]).

Niels Bohr habla del «esencial elemento de *ambigüedad* que involucra la adscripción de atributos físicos tradicionales a los objetos atómicos, como es evidente en el *dilema* acerca de las propiedades corpusculares y ondulatorias de los electrones...» ([6]). ¿Ambigüedad? ¿Dilema? Ambas cosas han quedado eliminadas por la tercera regla cuántica. En *Words and Things [Palabras y cosas]* dice Roger Brown: «Existe una conocida inclinación, por parte de quienes poseen cierta experiencia desusada y adquirida merced a arduos esfuerzos, a exagerar su lejanía de todo cuanto sabemos los demás»; palabras que le vienen a uno a las mientes cuando Bohr se refiere a la función ψ, y a la mecánica cuántica en general, diciendo: «Estos símbolos no son susceptibles de interpretación intuitiva (como ya lo indica el uso de números imaginarios)»; pero esto es ceder a una magia de las palabras propia del siglo dieciséis: los números imaginarios no son sino símbolos estenográficos que describen relaciones en un plano, ya sean intuitivas o no. Y, por otra parte, sería, ciertamente, demasiado intuitivo mirar un electrón en vuelo como una bola diminuta con unas alas ondulantes unidas a ella, como en determinado emblema deportivo; pero tal es, justamente, la imagen intuitiva que sugiere la tan oída frase de que la partícula electrónica (a la que se ha bautizado con el nombre de «ondícula») está *asociada* con una fase y una amplitud ondulatorias, simbolizadas por una función compleja, ψ. Cosa que reposa en una mala inteligencia de la «mecánica ondulatoria»: ahí hay un electrón, como entidad física, y cabe encontrarlo en cierto estado físico, *A;* pero este estado (geométricamente: este vector en el espacio de la transformación unitaria) puede representarse mediante una variedad infinita de funciones ψ, que denotan las relaciones probabilísticas entre tal estado *A* y un número infinito de conjuntos mutuamente ortogonales de estados (cada uno de los cuales conjuntos estará descrito por una función ψ); de modo que cada estado *A* podrá representarse por un número infinito de funciones ψ distintas, y cada una de ellas contendrá, a su vez, un número infinito de fases y amplitudes; y de ahí que sea enteramente desorientador imaginar que un electrón que se encuentre en cierto estado, *A,* esté «asociado» con un conjunto, cualquiera que éste fuese, de fases y de amplitudes —no digamos con una sola fase y una amplitud—. Esta última idea procede de la imagen intuitiva de unas ondas que arrastrarían consigo a los electrones, como el viento arrastra las partículas de polvo; mas esta primitiva imagen sigue apareciendo al cabo de tres

décadas en los debates sobre «Observación e interpretación» ([4]), tras haber renacido por obra de De Broglie, Bohm y Vigier.

Acaso parezca pedante criticar estas anticuadas nociones, que pueden seguir teniendo un valor heurístico; lo malo es, sin embargo, que se le imbuye al estudiante, ya desde la escuela primaria, la naturaleza pretendidamente dual de la materia como la gran novedad de la física moderna. Tras de lo cual ha de atravesar un largo período de estupor, hasta que por fin aprenda a tantear más o menos instintivamente el camino que ha de seguir a través de lo que muchos llaman «el lío cuántico», sin mucha ayuda por parte de su maestro, igualmente infectado.

36. El neodualismo y los fotones.

Una vez que quedaron asentadas la mecánica corpuscular de la difracción debida a Duane y la interpretación estadística general de Born, debería haber estado perfectamente claro que la mecánica unitaria de partículas puede dar razón de *todos* los fenómenos de la Naturaleza. No obstante lo cual, sigue defendiéndose al dualismo por medio del argumento de que igualmente puede darse razón de *todos* los fenómenos con la teoría de un continuo material fluido a la que se conoce con el nombre de *segunda cuantización* (Klein, Jordan y Wigner, 1928). A ella se llega a partir de la primera cuantización (la acostumbrada en mecánica de partículas), valiéndose de una transformación de coordenadas; mas, puesto que las dos cuantizaciones no son otra cosa que formas matemáticas distintas que describen las mismas observaciones, ¿por qué habríamos de pensar que la teoría corpuscular usual representa la «verdadera» situación mejor que la teoría, equivalente a ella, del fluido continuo cuantizado?; y esto ¿no vuelve el mundo maduro de nuevo para la dualidad? No lo creo así, pues el valor científico de una teoría no se mide únicamente por su capacidad para dar razón de los datos observados, sino también por los criterios de sencillez, carencia de supuestos *ad hoc* y reducibilidad a postulados más generales. Por ejemplo: Ptolomeo, Tycho Brahe y Copérnico describieron el movimiento de los planetas mediante tres modelos respectivos que sólo diferían por los puntos de referencia elegidos en el espacio; pero el sistema copernicano es muy superior (y, por consiguiente, hablando científicamente, representa la verdadera situación) no sólo en virtud de su sencillez formal, sino, todavía más, por su reducibilidad a la mecánica general de Newton; en tanto que el amontonamiento de unos círculos sobre otros sólo puede justificarse, en el mejor de los casos, con la metafísica razón de que los cuerpos celestes, que buscan la perfección,

tiene que moverse, como es debido, sobre la más perfecta de las curvas (no tendría sentido hablar de una triplicidad planetaria).

Algo semejante ocurre en lo que respecta a la primera y la segunda cuantizaciones. La primera considera que el átomo está constituido por N electrones discretos en torno de un núcleo y se encuentra regido por las reglas cuánticas de la mecánica (que, como hemos visto en los capítulos anteriores, pueden reducirse a postulados simples y generales), mientras que la segunda cuantización, en cambio, describe al átomo como un fluido eléctrico continuo regido por una ecuación diferencial no lineal enormemente complicada. Imaginemos por un momento que se hubiera descubierto inicialmente que cabe entender las propiedades de los noventa y dos átomos naturales a base de noventa y dos fluidos eléctricos distintos, gobernados por una complicada ecuación hidrodinámica, y que posteriormente descubriese alguien que tan voluminoso formalismo podía ser transcrito de manera sencilla, de suerte que nos presentase el modelo de N partículas electrónicas mantenidas en posición por una ley de atracción y repulsión proporcional al cuadrado de la distancia; no cabe duda de que en tal caso se celebraría a ese señor X como el Copérnico, Galileo y Newton juntos del microcosmos, en lugar de como el inventor de otro esquema matemático equivalente. Esta sola consideración condena la noción de que la transformación de K-J-W (por lo demás sumamente valiosa) haya salvado la dualidad. Desde todo punto de vista científico sólido, el átomo de argón consta *real* y *verdaderamente* de dieciocho electrones en torno de un centro cuyo número de cargas es 18; y decir que cabe «igualmente» mirarlo como un intrincado fluido eléctrico no es cuestión de gusto: es la traición definitiva a la ciencia de Galileo (por emplear una frase de K. Popper); y, además, es un error de hacer hincapié fuera de lugar, semejante al de clasificar al hombre como bípedo implume, ya que el formalismo de K-J-W no incluye ondas con λ y ν que correspondan al momento electrónico, p, y a la energía, E, del modelo de Rutherford. Y llamar «dualismo» a la yuxtaposición de K-J-W y la mecánica cuántica de los electrones es utilizar una marca registrada (en otro tiempo respetada) para un artículo sustitutivo distinto, que se vende sin notificación en debida forma al cliente, esto es, al oyente de alocuciones inaugurales, al visitante de pabellones científicos en ferias mundiales y al lector de libros sobre «La revolución intelectual de la física moderna». Por tanto, cuando Heisenberg ([7]) sostiene que «La simetría entre ondas y partículas ... ha de considerarse como un rasgo esencial de la teoría cuántica a partir de los trabajos de Born de 1927 y de la investigación de Klein, Jordan y Wigner», habría que tomarlo al menos con dos granos de sal, ya que los trabajos de Born de 1927 quedaron desbancados por los de Duane de 1923, y el continuo de K-J-W no da lugar ni siquiera a una apariencia de simetría entre ondas y partículas, dado que no contiene ondas.

Desde luego, nadie negará que el dualismo ingenuo original ha sido una idea heurística sumamente fértil; y tampoco soy ciego para el hecho de que la transformación de K-J-W, en cuanto tal, tiene gran valor en lo que se refiere a la cuantización de un continuo (por ejemplo, de un campo electromagnético en el espacio tridimensional); pero dentro de una teoría de la materia nos ofrece, simplemente, una transición del modelo de átomo de Rutherford a una complicada forma matemática, a la que podrían igualmente añadírsele otras muchas representaciones matemáticas que apoyasen una doctrina de pluralidad en lugar de una de dualidad. Con todo, el método de la ciencia consiste en aceptar una forma excepcionalmente sencilla de la teoría, dándola por «verdadera». También la mecánica clásica puede formularse de varias maneras equivalentes, ya sea mediante ecuaciones diferenciales del movimiento o valiéndose de teoremas de economía (principios variacionales), sin que por ello se pretendan dualidad ni pluralidad algunas. Considerar la transformación de K-J-W como otro argumento en favor del dualismo no es sino un subterfugio para proteger la falacia original de la dualidad, que se basaba en desconocer la tercera regla cuántica de la mecánica.

Volviendo ahora de la teoría de la materia a la de la luz, ha de preguntarse de nuevo: ¿qué es real y qué mera apariencia: las ondas de luz o las partículas fotónicas? Aquí la respuesta es exactamente opuesta a la correspondiente a la materia. La teoría moderna de campos ha abandonado tales partículas, que en otro tiempo fueron introducidas por Einstein como hipótesis heurística. La sustancia de la luz es un campo continuo que transporta energía, y, por ello, masa, campo que se subdivide en componentes armónicos u osciladores de campo, cada uno caracterizado por una coordenada generalizada, q, y un momento, p, que están sometidos a las mismas reglas de periodicidad cuántica que las q y p de los osciladores materiales, aun cuando cada oscilador de campo se extiende en forma continua por el espacio, en lugar de encontrarse concentrado en una pequeña parte de él, según sucedía con las partículas. En su básica obra *The Quantum Theory of Radiation [Teoría cuántica de la radiación]* ([8]), W. Heitler habla a menudo de los cuantos luminosos o fotones, pero, significativamente, añade: «Los cuantos de luz aparecen en la teoría únicamente como números cuánticos vinculados a los osciladores de la radiación». Ahora bien, los números cuánticos no saltan de un lado para otro, como los electrones; de modo que los constituyentes reales de la materia son partículas discretas, que ocasionalmente presentan la apariencia de una acción ondulatoria, y el constituyente real de la luz es un campo electromagnético continuo, que a veces presenta la apariencia de partículas fotónicas: tal es la tesis actual (que no tiene por qué ser eterna, desde luego).

Los teóricos, sin embargo, con su peculiar lógica cuántica *(honi soit qui mal*

y pense), pretenden haber olvidado la diferencia entre lo que las cosas son y lo que parecen ser: del curso obligatorio que han seguido en el paraninfo de filosofía han sacado la idea de que las «cosas» no son sino construcciones mentales constituidas a partir de haces de sensaciones, y que no hay ninguna realidad física en sentido objetivo alguno, *an sich.* Puede ser; pero tanto en la ciencia física como en la vida corriente, la distinción entre realidad y apariencia es vital: una nube puede aparecer como una pelota continua de material blanco, aun cuando en realidad consista en muchísimas gotitas; y, análogamente, la materia eléctrica puede presentar la apariencia de un medio continuo en el que produzcan ondas, pero en realidad consiste en partículas discretas (incluso en el caso de la difracción). Los campos electromagnéticos, con sus osciladores componentes, son reales, y entran en interacción con otras cosas, en tanto que las funciones ψ, que en la teoría cuántica de la radiación representan probabilidades de las intensidades de un oscilador de campo, no son cosas reales (susceptibles de puntapié). La apelación a argumentos del dominio de la filosofía idealista para evitar, justamente, el tener que elegir con claridad entre partículas y ondas no está a la altura de las normas del método científico, con su primer mandamiento, la regla de Occam: «Es preciso no multiplicar los entes sin necesidad». Hay una enorme diferencia entre: *a)* el hecho de que las distribuciones estadísticas y las energías de las partículas puedan calcularse mediante la ecuación de Schrödinger, con su aspecto ondulatorio (cosa que constituye una tremenda hazaña científica), y *b)* la aserción de que la materia nos presenta una simetría entre las manifestaciones corpusculares y ondulatorias, juntamente con implicaciones filosóficas relativas a la realidad física (lo cual es una doctrina pseudocientífica y, por ello, mucho más difícil de eliminar).

37. Incertidumbre frente a indeterminación.

Hagamos un examen de la piedra angular de la interpretación de Copenhague, a saber, la regla de incertidumbre de Heisenberg (que, incidentalmente, es una consecuencia particular de la mecánica cuántica en lugar de un principio autónomo). La relación de Heisenberg, $\delta p \cdot \delta p \approx h$ (en donde '$\approx$' significa aproximadamente igual a) describe el experimento siguiente: se lanzan unas partículas materiales hacia una pantalla dotada de una ranura de ancho δq (o hacia un fino listón de ancho δq, en el experimento recíproco); una película fotográfica situada a cierta distancia detrás de la pantalla (o del listoncillo) registra que las partículas se han dispersado en un haz de direcciones hacia los lados, con unas componentes laterales del momento, p, que se distribuyen estadísticamente en el intervalo $\delta p \approx h/\delta q$: cosa conforme con la mecánica cuántica

y, en particular, con el mecanismo de transferencia de impulsos de Duane-Epstein-Ehrenfest. La deflexión de una partícula individual no puede predecirse en el interior del intervalo δp: considerada anticipadamente es *incierta,* por más que quepa averiguarla *post factum.*

Es verdad que cabe calcular *también* la misma dispersión en direcciones a partir de la hipótesis de: *a)* conversión de las partículas en ondas en las proximidades de la ranura, *b)* difracción de las ondas por interferencia y *c)* formación de nuevo de las partículas a partir de las ondas (a lo que evasivamente se llama «doble manifestación»); pero ya nos es posible desprendernos de esta antieconómica hipótesis, puesto que la mecánica cuántica explica la dispersión estadística en forma unitaria merced a la conservación del momento. Así pues, hemos de hacer hincapié en que la relación de Heisenberg *no* constituye un argumento en favor de la índole dual de la materia, que fuese primero partículas, luego ondas y finalmente partículas de nuevo (añadiendo o no las palabras «como si»), sino que meramente circunscribe el intervalo de incertidumbre relativo a la *preparación y predicción* de un par exacto de valores de q y p de las partículas que salgan de una pantalla dotada de una ranura con un δq espacial [K. R. Popper ([13]), 1935].

Pese a lo cual, Niels Bohr quiere que sustituyamos el resultado empírico de Heisenberg acerca de la incertidumbre de las predicciones por una ideológica indeterminación de la existencia: le parece absurdo *pensar* siquiera que una partícula dentro del intervalo δq posea un valor definido de p situado en el interior del intervalo δp; dicho de otro modo, los electrones no pertenecerían a la clase de las cosas que *tienen* una posición y un momento exactos simultáneamente. Me cuesta mucho entender esto; pues las coincidencias en el espacio y el tiempo, esto es, los valores (q, t), forman la base de todas las mediciones físicas, y las demás magnitudes se definen partiendo de ellas. Por ejemplo, dos valores continuos de (q, t) definen el momento como $p = mv = m \cdot \delta q/\delta t$ (en el límite del cociente diferencial); pero incluso antes de llegar al cociente diferencial dq/dt, el valor de p en el lugar q no es nada absurdo, inexistente ni impensable: lo que puede medirse «existe» (cosa que no tiene nada que ver con el pequeño radio del electrón). Y la física cuántica de lo que se ocupa es de la incertidumbre en la *predicción* de lo que haya de ser, y no de la inexistencia o falta de sentido de lo que haya sido o sea.

¿Cómo pudo llegar jamás Bohr a declarar absurdo que una partícula tenga un valor exacto de p dentro de δq? Porque primero había traducido p por el $h/\lambda = h\kappa$ de la teoría ondulatoria, en donde, ciertamente, el número de onda, $\kappa = 1/\lambda$, de un agregado de ondas confinado dentro del intervalo δq carece de sentido —o es indefinible— dentro de los límites dados por $\delta\kappa = 1/\delta q$; y traduciendo luego el resultado obtenido con las ondas al lenguaje corpuscular llegó

a la falta de sentido de p dentro de los límites dados por $\delta p = h/\delta q$. Se trata del mismo (defectuoso) razonamiento que subyace a la supuesta dualidad cara a quienes no están al corriente de la tercera regla cuántica de la mecánica: es un artificio semántico, en vez de física legítima. Pero el que, tras haber caído en la trampa de proponer una indeterminación de existencia (seducido por la idea de la dualidad), se mantenga, apoyándose en tal propuesta, que «el principio de indeterminación» demuestra que las partículas no tienen existencia material constituye una hazaña del raciocinio circular completamente típica de la lógica cuántica actual; y, pese a haber despertado gran interés (*), descansa en el salto mortal de una transferencia arbitraria de propiedades ondulatorias a partículas, lo cual omite tomar en consideración el carácter estadístico de la teoría cuántica.

A este respecto se defienden varios puntos en defensa de la indeterminación de existencia. Primeramente, la componente del momento, p, de una partícula varía en la ranura difractante, δq, desde el valor inicial a otro final; de modo que ¿cómo podría decirse que la partícula *tenga* un valor definido de p, si hay dos? Pero esta objeción es trivial: igualmente habría de aplicarse a la reflexión de una bola de billar corriente, que no nos ofrece una «lección epistemológica nueva» (expresión de Bohr); y, además, esta argumentación admite que la partícula *tiene* primero un valor de p y luego otro, de suerte que concede lo que pretendía negar.

La segunda línea de defensa de Copenhague es del siguiente tenor: no es posible medir directamente dentro de δq el valor exacto de p, sino sólo *indirectamente,* reconstruyendo la trayectoria desde la rendija hasta el punto de llegada a la película. Pero también esta objeción se anula a sí misma, pues ¿de qué otro modo podría validarse la regla de Heisenberg, $\delta p \approx h/\delta q$, sino a partir de una serie de puntos de llegada de partículas a la película?; y denegar una existencia real y con sentido a los valores de p en el interior de δq sobre la base de que sólo podrían averiguarse por medios indirectos, pero utilizar, al mismo tiempo, los mismos «indirectos» valores de p y su dispersión por la fotografía como testimonio en favor de un principio de indeterminación es, de nuevo, valerse de una lógica circular. Mas sobre esta lógica descansa la totalidad de la filosofía de Copenhague. Además, en física no tenemos nunca datos «directos», con la sola excepción de la ubicación en el espacio y el tiempo,

(*) Citemos una sola de entre docenas de declaraciones parecidas: «Se ha indicado que la revisión [de la física por la indeterminación] penetra hasta la base del destino y la libertad del hombre, al afectar, incluso, a su concepción de la facultad de regir sus propios destinos. No hay parte de la física en la que esta sugerencia sea más pertinente que en el principio de indeterminación de la mecánica cuántica». De una introducción (autorizada) de F. C. S. Northrop a *Física y filosofía,* de Heisenberg.

esto es, de los valores de (q, t): la velocidad, el momento, la energía, etc., se determinan siempre indirectamente; la velocidad, por su propia definición, exige que se midan dos posiciones contiguas en dos instantes inmediatos; los velocímetros mecánicos y electromagnéticos se apoyan en teorías, a las que difícilmente cabe calificar de «directas»; y la medición de un momento descansa en la de la velocidad de un cuerpo en rotación. Es cierto que, si bien la partícula sale de la ranura o de sus alrededores, al terminar la medición ya no se encuentra dentro de aquélla; no obstante lo cual, carece de objeto negar que tiene que haber salido del sistema difractor con un momento lateral determinado, en lugar de con un momento inexistente o absurdo. Estoy enteramente de acuerdo en que la distinción entre *ser* y *ser visto,* que carece de trascendencia en las dimensiones de la vida cotidiana, se convierte en importante en los dominios microfísicos, en donde el acto de ser visto representa una intrusión relativamente grande padecida por el objeto visto; sin embargo, me es imposible apoyar a una doctrina cuántica que equipara «observado indirectamente» con «no observado», luego con «no observable» y, finalmente, con «inexistente» y «absurdo»: todo ello recuerda demasiado los sofismas de Zenón, a quien le parecía absurdo que una flecha pudiera *estar* en un lugar determinado y al mismo tiempo *cambiar* de lugar.

Acaso sea útil descender del imaginario experimento de difracción que ejemplifica la relación $\delta p \cdot \delta q \approx h$ a un experimento concreto que ejemplifica la relación $\delta E \cdot \delta t \approx h$: a saber, la emisión de partículas α por una preparación de radio, que está regida estadísticamente; en este caso, δt es el intervalo de incertidumbre en la predicción del instante en que se emitirá una partícula α individual, o sea, la vida media del radio ($\delta t = 1.580$ años), y corresponde a una estrecha gama de distribución estadística de las energías de escape, $\delta E \approx \approx h/t$. Sin embargo, según la lógica cuántica que hemos presentado, habría que sostener que el chasquido del contador de Geiger que anuncie el momento de llegada de una partícula individual sólo constituye una medición temporal indirecta del instante de su escape, que los instantes directos de escape no existen realmente dentro del intervalo δt, y que son absurdos; lo cual me parece a mí una aserción ciertamente absurda, que pretende demostrar el poder de las palabras sobre los hechos. Estoy de acuerdo, por tanto, con la observación de Einstein [9] de que «Si se admite la interpretación estadística ... todo ese *baile entre huevos* destinado a evitar lo físicamente real se vuelve superfluo»; y aquí la «*Eiertanz*» consiste en trasplantar la inmemorable discusión acerca de la realidad a la esfera de la ciencia natural, en donde el realismo práctico es indispensable, y está salvaguardado en la física atómica por la teoría estadística de los fenómenos de las partículas mecánicas. En particular, las reglas de Heisenberg, $\delta p \approx h/\delta q$ y $\delta E \approx h/\delta t$, describen una *dispersión estadística* objetiva de

los valores de p y E; la expresión de *regla de incertidumbre* le da un leve tinte subjetivo, pero en cuanto experiencia usual pertenece aún a la física; en cambio, la aserción acerca de la *inexistencia* es de carácter puramente metafísico y, sin duda alguna, no constituye una lección de la física moderna.

Einstein ha ideado un experimento imaginario en el que podría efectuarse una determinación directa de la variación exacta de energía, δE, de un cuerpo de masa m en un instante t carente de la indeterminación δt, merced a una determinación instantánea de la variación de su masa, $\delta m = \delta E/c^2$. Bohr ([10]) intentó refutarlo fijando los triunfos mediante la propia teoría de Einstein del corrimiento gravitatorio hacia el rojo en virtud de la relatividad general, esto es, apoyándose en el atraso, δt, que sufriría un reloj de masa m que se desplazase la distancia δq contra un campo gravitatorio de potencial gq: caso en el que el reloj experimentaría un atraso relativo expresado por la fórmula

$$\delta t/t = g\,\delta q/c^2 = mg\,\delta q/mc^2 = \delta E/E.$$

(Los corrimientos δt, δq y δE se toman como incertidumbres respectivas de t, q y E, de forma que se vindique la vinculación de incertidumbre entre E y t.) Sin embargo, como ha hecho observar J. Agassi, si las consideraciones de Bohr fuesen concluyentes, querrían decir que el corrimiento relativista hacia el rojo podría *extraerse,* como consecuencia, de la indeterminación cuántica, o viceversa; lo cual constituiría un descubrimiento absolutamente fundamental si no fuese tan patentemente inexacto: pues ¿cómo puede esperarse que la proporcionalidad inversa entre δE y δt de la teoría cuántica quede justificada apelando a la proporcionalidad directa de aquellas mismas cantidades en la fórmula arriba reproducida? Frente a la partidista opinión de que «Bohr ha contestado satisfactoriamente a todas las sutiles objeciones planteadas por Einstein» (L. Rosenfeld), no creo que sea Einstein el refutado.

Si las mediciones de energía se limitasen a las efectuables por el método óptico *indirecto* de Franck-Hertz, en el que se advierte cuál era la energía, E, de una partícula incidente merced a la frecuencia, $\nu = E/h$, que elicite en ciertos átomos, cabría, ciertamente, determinar esta frecuencia, ν, sólo con una precisión $\delta\nu \approx 1/\delta t$, y únicamente podría hallarse E con un margen de indeterminación $\delta E \approx h/\delta t$. Sin embargo, la tesis de Copenhague es, justamente, que sólo deben contar las mediciones *directas.*

Ya hemos visto en el experimento de las dos ranuras cuál es la principal dificultad que se opone a la idea de que una partícula se encuentre siempre en un punto del espacio: en tal caso se pregunta cómo es posible que una partícula pueda cooperar a formar la figura de difracción a menos que se transforme primero en una onda que cubra ambas ranuras simultáneamente; pero, como ya

hemos dicho antes, la mecánica cuántica (en particular, el mecanismo de Duane-Epstein-Ehrenfest de transferencia de impulsos) señala cuál es la vía de escape ante este dilema: la figura de difracción no depende de los lugares exactos en que tal o cual partícula reaccione con el dispositivo difractor, sino que éste causa una deflexión en la partícula incidente en virtud de los componentes periódicos de su distribución de materia en el espacio; y de ahí que cualquier trayectoria lineal de la partícula valga tanto como cualquier otra en punto a determinar los resultados estadísticos observados, sin necesidad de que los electrones se extiendan sobre ambas ranuras.

En conclusión: hay tres interpretaciones de la relación de Heisenberg, $\delta p \cdot \delta q \approx h$ (y $\delta E \cdot \delta t \approx h$):

a) No es posible preparar ni *predecir* los valores simultáneos de p y q. Esta es la regla de incertidumbre original, que es una parte especial de la mecánica cuántica que ha sido confirmada experimentalmente.

b) No es posible *medir* los valores simultáneos de p y q. Esta versión es una verdad a medias: si se incluye la palabra 'directamente' es trivial, porque nunca puede medirse un momento directamente; y sin esta palabra es errónea, ya que *cabe* determinar el valor p adquirido en el interior de δq reconstruyendo los datos espaciotemporales por medio de la teoría, cosa que constituye el método usual en la física práctica y en la teoría.

c) No hay coexistencia exacta de los valores de p y q, de modo que hablar de una pareja exactamente simultánea de valores qp es absurdo. Esta versión sólo funciona cuando se reemplaza arbitrariamente la falta de predecibilidad por la de mensurabilidad, y luego por la inexistencia.

En conjunto, la regla de Heisenberg ni se ocupa de indeterminación ni es un principio, sino que describe un ejemplo especial (y de la máxima importancia) de impredecibilidad, si bien la impredecibilidad en general se conocía desde que la gente comenzó a apostar acerca de sucesos futuros. La regla especial de Heisenberg se sigue de los teoremas generales de la mecánica cuántica, que, a su vez, se siguen de unos postulados aún más generales de simetría e invariancia que son los únicos que merecen el nombre de «principios».

38. La reconstrucción de los datos impredecibles.

Hay una doctrina estrechamente relacionada con la opinión de que es absurdo pensar en la existencia de *qp:* es la doctrina de que *no se puede* saber qué ocurre entre dos ensayos observacionales, y de que, por consiguiente, lo mejor es pensar y decir que *no ocurre nada:* «Si preguntamos, por ejemplo, si la posición del electrón permanece la misma [entre dos observaciones], tenemos

que decir que no; si preguntamos si la posición del electrón varía con el tiempo, hemos de decir que no; si preguntamos si el electrón está en reposo, hemos de decir que no, y si preguntamos si está en movimiento, habremos de decir que no», dice Robert Oppenheimer ([11]); y Heisenberg ([7]) habla de las «dificultades sin salida para rellenar el hueco de lo que suceda entre dos observaciones». A mí me parece justamente lo contrario, a saber, que las que no tienen salida son las dificultades que se oponen a la descripción de lo que suceda exactamente *durante* la observación (mejor dicho, durante la reacción con un instrumento de ensayo), mientras que con frecuencia es posible rellenar el hueco de lo que suceda *entre* dos observaciones; lo cual es, sin duda, verdad cuando éstas son del tipo que justamente se considera ser el único de observación *directa,* o sea, las coincidencias en el espacio y el tiempo (pues todos los demás datos son «indirectos», e incluyen alguna teoría más o menos discutible).

Tomemos el ejemplo de una partícula situada en cierto campo de fuerzas, a la que primeramente se observe en el punto espaciotemporal $(q_1\ t_1)$ y luego en el $(q_2\ t_2)$. Independientemente de la altura que tenga la barrera de energía entre los dos puntos, cabe siempre reconstruir una trayectoria y sólo una sin más que reunir las dos posiciones espaciotemporales de acuerdo con las leyes de la mecánica clásica. Ciertamente, la primera medición afecta a la energía y el momento del corpúsculo de manera impredecible; pero la segunda medición de $(q,\ t)$ revela qué E y qué p había adquirido realmente durante la primera, ya que ellos son los que lo han llevado del primer punto al segundo a lo largo de una trayectoria continua en el intervalo debido de tiempo. Por consiguiente, propongo la tesis de que en el caso típico de mediciones de ubicación espaciotemporal (coincidencias) *siempre se puede rellenar* el hueco mencionado con una trayectoria definida que proporcione unas ubicaciones definidas para todos los instantes intermedios.

La negación de que la partícula *esté* siempre en algún sitio no está justificada ni siquiera por los experimentos de difracción, ya que, de acuerdo con la mecánica cuántica (y frente a la historia de la manifestación ondulatoria que se contaba hace tres decenios), toda partícula entra en reacción con un componente periódico, extenso en el espacio, de la distribución material del dispositivo difractor, y carece de importancia dónde tiene lugar exactamente la reacción. Pero decir que no tiene lugar en ninguna parte, y que es absurdo atribuirle alguna, aunque desconocida, no está justificado ni experimental ni teóricamente: es una extravagancia lingüística, y no una innovación filosófica.

En el caso de cantidades *indirectas* se presentan dificultades de reconstrucción. El caso más sencillo es el de la velocidad, a la que se define por el cociente diferencial $v = dq/dt$ y que se calcula aproximadamente por el cociente $(q_1 - q_2)/(t_1 - t_2)$ para puntos contiguos; pero no existen métodos directos

de determinarla: es indudable que las lecturas de velocímetro son indirectas, ya que se apoyan en la teoría de las fuerzas centrífugas o en la electromagnética. Además, como ha subrayado Margenau, la velocidad, el momento y otras cantidades indirectas son susceptibles de distintas definiciones operacionales, y ninguna de ellas puede pretender ser la única correcta. Veamos el caso de una partícula libre que se mueva en ambos sentidos a lo largo de una línea de longitud L, y supongamos que se la observa en dos puntos espaciotemporales, 1 y 2; de acuerdo con una de las definiciones, la velocidad entre las dos mediciones es $(q_1 - q_2)/(t_1 - t_2)$, mientras que, según la teoría cuántica, la velocidad que se obtiene con este dispositivo sólo puede tener el valor $v = p/m = h/2mL$ o un múltiplo de él (desde luego, la vía de escape más fácil del conflicto es decretar que la partícula *no tiene* velocidad entre las dos observaciones de (q, t), y que es absurdo preguntar siquiera si se mueve). Con otros observables «indirectos» pueden presentarse dilemas parecidos; pero decir que no sucede nada no es ni confirmable ni falsable mediante experimentos, sino una frase vacía. Tal vez pueda encontrarse la raíz de la dificultad relativa a la reconstrucción de los valores de los observables indirectos en una ambigüedad de su definición, que exige siempre apoyarse en una teoría; por ejemplo, las dos definiciones de la energía cinética, $p^2/2m$ y $pqp/2qm$, son idénticas en la mecánica clásica, pero difieren en la cuántica, en la cual p es el operador diferencial $(h/2i\pi)d/dq$, que no conmuta con q; de modo que ¿cuál de las dos definiciones tiene razón?

Es menester que no se confunda la distinción entre los observables directos y los indirectos con la existencia entre las cualidades primarias y secundarias del empirismo dieciochesco, que consideraba la ubicación en el espacio y el tiempo como una propiedad objetiva primaria, frente al color, el olor y el gusto como cualidades secundarias, variables de un sujeto a otro; pues entonces la pregunta era: «¿Qué podemos conocer con certeza objetiva acerca de las cosas?», mientras que en física preguntamos: «¿Qué podemos medir con instrumentos?» (con entera independencia, desde luego, de que nosotros mismos u otras personas adquiramos un conocimiento consciente de los datos). A este respecto estoy de perfecto acuerdo con R. D. Bradley ([12]) cuando decía: «La noción de que un átomo carezca absolutamente de propiedades cuando no se lo observa es el ejemplo supremo de una tesis puramente metafísica que se disfraza de teoría física»; véase también lo que dice K. R. Popper ([13]).

En el ejemplo que sigue se nos presenta una situación problemática en relación con observables indirectos. Según la ecuación de Schrödinger, una partícula de energía E_1 tiene una probabilidad finita de encontrarse en puntos q_2 que exigirían poseer una energía mayor, $E_2 > E_1$. ¿Cómo puede jamás ocurrir que una partícula «perfore un túnel hasta llegar a un punto energéticamente

inaccesible»? La mecánica cuántica responde que el corpúsculo, en virtud de su reacción con el medidor de posición que explore q_2, puede haber *alterado* su energía dentro de un amplio intervalo, δE, en el que estará incluida la energía exigida, E_2; luego carece de justificación exclamar: «Ya ven que la materia es de índole ondulatoria, puesto que sólo cabe alcanzar el punto prohibido en virtud de la ecuación de onda», dado que, ciertamente, es una ecuación de onda, pero ello no implica que los electrones sean «ondículas»: la ecuación de Schrödinger no se refiere a ondas de materia, sino a amplitudes probabilísticas; y no podemos admitir el significado estadístico de ψ fuera del túnel, en donde ha sido confirmado experimentalmente, y deshacernos de él en su interior (*).

Distingamos, pues, entre lo que en un sentido amplio se llama el lenguaje de Copenhague, al que designaremos con *C*, y, contrapuesta a él, una tesis más realista, *R:* según *C*, no existe en δq, ni emerge de él, valor alguno exacto de p, mientras que, según *R*, existe un valor exacto de p en el interior de δq y es posible reconstruirlo a partir de observaciones posteriores; según *C*, una partícula no *está* en lugar alguno entre dos observaciones de su posición, ni *tiene* un valor exacto de E mientras no se acredite E mediante una observación directa (ignoro lo que pueda constituir una observación «directa» de una energía), en tanto que, para *R*, toda partícula está siempre en algún sitio, y puede tener al mismo tiempo energía y posición, pese a la «incompatibilidad» de estos observables, es decir, a la imposibilidad de preparar y *predecir* una pareja exacta (E, q). Hay algunos casos excepcionales (por ejemplo, el efecto de túnel) en los que la simultaneidad de existencia lleva a ciertas dificultades de acuerdo con las ideas clásicas, pero no autorizan, sin embargo, que se niegue en todos los casos la coexistencia aludida. De acuerdo con *C*, una partícula α emitida con un margen de energía δE no *tiene* un instante exacto de salida, pero según *R* sí lo tiene, por más que no sea posible predecirlo ni prepararlo; de acuerdo con *C*, el eje del espín de una partícula no *tiene* dirección alguna antes de penetrar en un campo magnético, pero según *R* existe una dirección del espín también antes de entrar en el campo.

39. La mística de la contracción del paquete de ondas.

No sería leal citar opiniones enunciadas durante los primeros y turbulentos años que siguieron a la constitución del formalismo cuántico en 1926 si tales

(*) Tal vez estas consideraciones muestren que me he acercado mucho al realismo más empirismo postulado por H. Mehlberg, en sus «Comments», páginas 360-370 de *Current Issues in the Philosophy of Science*, comp. por H. Feigl y G. Maxwell, Nueva York, 1961.

tesis no se continuaran presentando como ciencia moderna. Así, en su debate (de 1949) con Einstein sobre el experimento de difracción, Bohr ([10]) habla de «la onda vinculada al movimiento de la partícula»; pero tenemos entonces que preguntar: ¿qué tipo de onda?; ¿una onda piloto extensa en el espacio, que guiaría la partícula, como pensaba De Broglie, o una onda mental de falta de conocimiento? Tal vez la respuesta se encuentre en la descripción heisenberguiana de 1930 de lo que sucede cuando una partícula —carece aquí de importancia el que sea de luz o de materia— se halla en el lado de la reflexión de un tabique semirreflejante, a cuyo través podría igualmente haberse transmitido ([2]): «El experimento [de atrapar la partícula] relativo a la posición del paquete de ondas reflejado ejerce cierto tipo de acción (una reducción del paquete de ondas) sobre el distante punto ocupado por el paquete de ondas transmitido; y se advierte que esta acción se propaga con una velocidad superior a la de la luz»; Heisenberg nos asegura luego que la «acción» ejercida por el experimento que se realiza en un lugar, y que se transmite con una velocidad supralumínica a otro lugar, no viola la teoría de la relatividad, ya que no se la puede utilizar para transmitir señal alguna. Muy bien. Pero, de acuerdo con la interpretación estadística, cada función ψ es una tabla de probabilidades, que no difiere esencialmente de una tabla cualquiera de mortalidad; y supongamos que se utiliza una de estas tablas en la ciudad *A* para asegurar a una persona en un viaje que piense hacer en dirección Este, y otra tabla para el segundo correspondiente a un viaje en dirección Oeste; si resulta luego que fallece en un lugar *W*, situado al oeste de *A*, ¿acaso se produce un colapso de las tablas de mortalidad, que se transmite con velocidad supralumínica, en virtud de «cierto tipo de acción», desde *W* a todos los puntos al este de *A*? Esto se decía en 1930, tres años después de que la interpretación estadística de Born hubiese aclarado las cosas.

Hoy existe una versión más sutil de la historia acerca de la contracción del paquete de ondas: las dos mitades del paquete no se desplazan realmente por el espacio a uno y otro lado del tabique semirreflejante; pues sólo son imágenes mentales. La imagen mental de los dos paquetes de ondas se contrae instantáneamente cuando la partícula —que es asimismo una imagen, dual de la imagen ondulatoria— se registra en el lado Oeste; o bien, según la última versión, precisamente cuando el dato registrado entra en el conocimiento consciente de un observador (si es que entiendo correctamente esta teoría psicofísica). Pero uno no sabe nunca si ψ describe ondas del espacio físico asociadas a unas partículas guiadas por la ecuación de Schrödinger, o si es una imagen mental de acciones posibles sobre la imagen corpuscular; por lo cual nos volvemos de nuevo en busca de consejo a Heisenberg:

«Es perfectamente posible imaginar esta transición de lo posible a lo real desplazada a un instante temporal anterior».

Y Heisenberg contesta a quienes se pregunten por qué es posible desplazar una transición a un instante anterior: «Pues el observador no es quien produce la transición». Esto es bastante desconcertante, ya que no se sabe qué parte de la transición de lo posible a lo real es mental y qué parte es física; pero Heisenberg responde a todo con la siguiente declaración ([7]): «La representación de un paquete de probabilidades es completamente 'objetiva', es decir, no incluye rasgos vinculados al conocimiento del observador; pero es también completamente abstracta e incomprensible, ya que las diversas expresiones matemáticas $\psi(q)$, $\psi(p)$, etc., no se refieren a ninguna propiedad real: por así decirlo, en ellas no hay física alguna». Esto es dialéctica hegeliana a la inversa: según Hegel, el concepto matemático no existe, pero es real, mientras que la cosa individual existe, pero no es real; para Heisenberg, el concepto matemático de la función ψ es objetivo, pero no físico, en tanto que una cosa, una partícula, es física pero no objetiva, ya que no es otra cosa que una imagen subjetiva. Recogiendo un pasaje de James R. Newman (que él aplicaba a otro caso), podría decirse que «Uno se siente inclinado a asentir a lo que dice, sin saber exactamente a qué está asintiendo»: pues, verdaderamente, cuando «objetivo» acompaña a «abstracto e incomprensible», a «ninguna propiedad real» y a «no hay física alguna», y asimismo, cuando el comienzo de «lo real» puede desplazarse a un instante temporal anterior, uno vacila antes de asentir a semejante juego escolástico con el vocabulario filosófico. De igual modo, cuando Heisenberg invoca la *potentia* de Aristóteles en relación con el incierto resultado de los ensayos atómicos, uno se pregunta por qué no se necesita igualmente la *potentia* para aclarar la incertidumbre en los juegos de azar corrientes. En cuanto a la observación de Heisenberg de que «no es posible deducir la reducción de los paquetes de ondas de la ecuación de Schrödinger», es trivial, a menos que siga coqueteando con la idea de una «acción que se propaga por el espacio con velocidad supralumínica»; y tampoco puedo entender por qué una partícula, tras haber reaccionado con un tabique semirreflejante, no *está* ni a la derecha ni a la izquierda de él hasta que una «transformación de lo posible a lo real» haya entrado en la conciencia de alguien. Con el debido respeto, parece que Heisenberg no pasa de describir con términos exóticos algo que, tras descender de las nubes, podría igualmente decirse, en un idioma más terrenal, del siguiente modo:

Un micro-objeto que, según revele un medidor de S, se encuentre en el estado S_m, puede muy bien ser sometido luego a ensayo en un medidor de T y ser de este modo lanzado al estado T_n. Esto es todo; y todo lo que se añada acerca de «abstracto e incomprensible», y otras sutilezas filosóficas, sólo servirá

para suscitar confusión. Es cierto que el estado inicial, S_m, está vinculado con los diversos estados, T_1, T_2, ..., que pueden aparecer tras un ensayo de T por medio de una función probabilística; pero no hay razón alguna para atribuir a esta función, a este «paquete de ondas», los místicos rasgos que Heisenberg le aplica. Con todo, Von Weizsäcker, formado en la filosofía de ψ, corta el nudo gordiano de la profundidad con la siguiente declaración (1): «Lo mejor será que hablemos de un colapso de la categoría de sustancia ... o bien de adaptar nuestra lógica, formada pensando en objetos, a la nueva situación»; mas, pese a que esto parece estar pregnante de perspectivas cósmicas, y tener casi tan gran alcance como lo de «penetrar hasta la base del destino y la libertad del hombre» (véase la pág. 121), sigue costándome mucho comprender: en primer término, resulta algo heroico concluir, debido a que una medición de q involucre un retroceso impredecible de p, que se ha producido un colapso de la categoría de sustancia; segundo, la lógica es una disciplina puramente formal, que no tiene nada que ver con si uno «piensa en objetos» o no; tercero, la aplicación de la lógica trivalente de «sí», «no» o «sin decidir» es ilógica, ya que el sí y el no se refieren a hechos, en tanto que lo de sin decidir afecta a lo que alguien pueda *pensar* acerca de hechos que no hayan acontecido aún (una vez más, los falsos opuestos); y en cuarto lugar, toda configuración estadística, incluso la de Gauss en el caso de que haya una simetría geométrica, constituye una especie de rompecabezas, por las razones expuestas en el capítulo II, pero no puedo decidirme a adaptar mi lógica, ni a dejar de pensar en objetos, etc., porque además de la distribución gaussiana haya máximos y mínimos alternantes.

La aseveración anterior de Von Weizsäcker es sintomática de un estado de ánimo, endémico entre los intérpretes cuánticos, que el lógico Wittgenstein ha diagnosticado como «calambres mentales producidos por rompecabezas de origen lingüístico». Verdaderamente, cometer el pecado original de aceptar la palabra 'dualidad' como explicación es retornar al nominalismo de la Edad escolástica.

40. La interpretación subjetiva.

El escepticismo acerca de «pensar en objetos» es una antigua historia. Todo avestruz y todo nene son idealistas berkeleyanos para los que las cosas existen mientras se las ve, y dejan de existir cuando se tapan los ojos. Pero tanto el sentido común como la ciencia se basan en la idea opuesta: aun cuando ciertas propiedades del objeto cambien al mirarlas o medirlas (el momento de un electrón, por ejemplo, se altera en forma impredecible por su retroceso ante la reflexión de la luz), hay otras permanentes, como la masa, la carga y el espín,

que caracterizan la *cosa* de manera objetiva; y no hay razones para no «pensar en objetos», no digamos para «adaptar nuestra lógica», a menos que se confundan las propiedades variables con *cosas* (caracterizadas realmente por propiedades permanentes). Así, cuando se ha evaluado la energía del electrón de un átomo de H (desde luego, indirectamente), no se puede predecir el resultado de una medición de posición subsiguiente en un instante determinado: lo cual es un hecho físico; pero mantener que el electrón no *tiene* en absoluto posición entre dos mediciones es simple retórica, y no revolución alguna de la teoría del conocimiento. (Todo esto lo han dicho ya antes otros autores: consúltense las críticas de 1935 de K. R. Popper ([13]) y los trabajos, más recientes, de M. Bunge ([14]), P. Feyerabend ([15]) y H. Margenau ([16]), por no nombrar sino a unos pocos representantes de la marea que se está alzando en oposición al «mundo feliz» construido, en la capital danesa y feudos circundantes, sobre los grandes progresos en física logrados en esos mismos lugares.)

Naturalmente, sé que la teoría cuántica ha introducido unas innovaciones muy importantes en la ciencia de la mecánica; pero las novedades no consisten en descubrir que hay observables mutuamente incompatibles en cuanto tales, pues podrían mencionarse muchísimos ejemplos corrientes en los que se hace visible el mismo concepto; ni tampoco reside la novedad en darse cuenta de que la distribución estadística *atómica* desafía la explicación causal, ya que lo mismo sucede con toda distribución estadística de cualquier juego de azar. Cabe resumir, en cambio, las lecciones peculiares de la física cuántica del modo siguiente:

1) Existe una clase de «observables», A, B, C, ..., relativos a un sistema mecánico dado, que son capaces de tomar respectivamente unos conjuntos de «autovalores», A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, B_3, ..., etc., que cabe averiguar por medio de medidores de A, medidores de B, etc. (en la mayoría de los casos, de manera muy indirecta). Los autovalores corresponden a los respectivos «estados».

2) Los «estados» se encuentran vinculados entre sí por probabilidades tales como $P(A_k, B_j)$, que presentan una *simetría* bilateral; lo cual lleva a la conclusión de que cabe disponer las P en matrices, todas ellas de la misma multiplicidad, en las que toda fila y toda columna es tal que la suma de sus M elementos vale la *unidad*.

3) El postulado de que las matrices de P sean interdependientes obedeciendo a un teorema *general* (esto es, simétrico y transitivo) sólo queda satisfecho por la transformación unitaria, que es isomórfica con la interferencia de probabilidades a través de las amplitudes probabilitarias ψ.

4) El postulado de que la dinámica probabilística sea invariante con respecto a desplazamientos lineales de los puntos origen en los espacios de q y p

entraña que la función de la amplitud probabilitaria, $\psi(q, p)$, tenga la forma periódica $\exp(2i\pi qp/C^{te})$; y la constante es la que se conoce con el nombre de h de Planck.

Estos son los rasgos que caracterizan a la mecánica cuántica dentro de la categoría general de los juegos de azar, rasgos que abarcan todas las propiedades ondulatorias atribuidas a ψ (la no conmutatividad de los factores en los productos simbólicos y todas las demás). No hay nada incomprensible ni abstracto que pida una teoría nueva del conocimiento en la que la categoría de sustancia quedase eliminada, y a la cual hubiese que «adaptar nuestra lógica»: la mecánica cuántica describe relaciones entre datos de instrumentos macroscópicos; y no digo «lecturas» para evitar toda alusión a sujetos lectores, pues el conocimiento y la lectura consciente por observadores humanos son tan poco pertinentes en la física atómica como en cualquier otra rama de la ciencia física. Así pues, hablar de la contracción de un paquete de ondas tras una observación es algo tan carente de sentido como hablar de una contracción súbita de una tabla de mortalidad tras un fallecimiento; es un trasto viejo que habría que arrumbar en beneficio de la claridad, y cuanto antes, mejor.

41. La medición.

Con objeto de medir la altura de un nivel de energía, una posición en un instante determinado u otro observable cualquiera, al que llamaremos A, referente a cierto objeto (suponiendo que sigamos «pensando en objetos», sin cuidarnos de la admonición de Von Weizsäcker), necesitamos un instrumento, o medidor de A (el cual, a su vez, definirá qué es lo que se quiere decir con el observable A); y hablando en general, la posición de la aguja indicadora en la escala de A indicará cierto valor, A_k. Por lo regular, las mediciones atómicas precisan una gran amplificación, tal como la proporcionada por condensaciones de gotitas, burbujas, ennegrecimiento de granos fotográficos, aludes en contadores de Geiger, y cosas semejantes; pero tales mediciones son siempre indirectas: sólo cabe imaginar experimentos idealizados que proporcionen pruebas «directas» (cualquiera que sea lo que esto quiera decir). En lo que se refiere a la significación del resultado de una medición, existe, sin embargo, cierta diferencia entre la teoría clásica y la cuántica: según las ideas clásicas, puede atribuirse al objeto el valor A_k inmediatamente antes de la medición de A, durante ella y después de ella; pero, según la física cuántica, hay una participación activa, impredecible e inevitable del medidor de A en la obtención del resultado, ya que lanza al objeto microfísico desde el estado que previamente ocupara, S_m (determinado por un medidor de S) al nuevo estado A_k; y,

por consiguiente, sólo puede atribuirse el valor medido al objeto atómico inmediatamente *después* de acabar la medición. Un medidor de B que se emplee a continuación y nos proporcione el valor B_n borrará toda huella del estado anterior, A_k, dando lugar, pues, a una situación enteramente nueva. (Diremos incidentalmente que en el caso típico de dos mediciones de ubicación espaciotemporal cabe reconstruir la trayectoria que las una de acuerdo con la mecánica clásica, como ya hemos dicho en el apartado 38.)

Las dificultades comienzan, sin embargo, cuando se mira al cuerpo material que se emplee de instrumento de medida como un *sujeto;* y cuando se dice que la teoría cuántica ha cambiado la relación existente entre el sujeto y el objeto, ello causa gran impresión en quienes hayan llegado a identificar la distribución estadística registrada por los instrumentos con el conocimiento o falta de conocimiento de unos sujetos que efectúen las observaciones. La tendencia subjetivista empezó con las dos imágenes mentales en lugar de una realidad física de las partículas materiales, y llega al colmo cuando se presenta la *conciencia humana* como un elemento esencial de la teoría atómica; por ejemplo, cuando E. Wigner declaraba en un reciente simposio sobre física y filosofía (Marquette University, 1961): «Los físicos han visto que es imposible presentar una descripción satisfactoria de los fenómenos atómicos sin hacer referencia a la conciencia ... Ninguna medición atómica está completa mientras su resultado no haya entrado en la conciencia». Con el debido respeto, me parece imposible comprender por qué la medición de la velocidad de un electrón entre dos placas cargadas puede sólo describirse con referencia a la conciencia en tanto que la medición de la velocidad de una piedra que caiga puede realizarse sin tratar de ella. ¿O es que la conciencia sólo se necesita cuando interviene el albur estadístico, cuando no se puede predecir el resultado? Si así fuese, ¿por qué ha de entrar en la conciencia la impredecible reacción de un electrón que vaya hacia la derecha o hacia la izquierda en un experimento de desdoblamiento magnético (Stern-Gerlach) para que éste quede completo, mientras que no sería necesario que sucediera lo mismo en el caso de una bola que caiga a la derecha o la izquierda de una navaja? Y todavía me pasma más la frase, tan frecuentemente repetida, de que un electrón sometido a un experimento de Stern-Gerlach de deflexión en dos direcciones posibles no *está* ni a la derecha ni a la izquierda hasta que el informe de haber llegado aquí o allí haya entrado en la conciencia de alguien: si se dijese lo mismo de la bola en el juego de la bola y la navaja no tendría sentido, desde luego; pero puesto que la diferencia entre el electrón y la bola es de tamaño, a uno le gustaría saber si la conciencia entra en escena gradualmente, pasando por la semiconciencia, o en forma abrupta, al alcanzarse un tamaño diacrítico. No soy el único que sostiene que la física cuántica, tanto la experimental como la teórica, se ocupa de datos

registrados por instrumentos, y no de la conciencia de los observadores; de objetos, y no de imágenes mentales; de distribuciones estadísticas, y no de falta de conocimiento por parte de observadores humanos. El que el dato recogido por un instrumento lo «lea» esta o la otra persona (que lo advertirá conscientemente) carece absoluta, total y definitivamente de importancia; de modo que me siento enteramente del lado de Reichenbach ([17]) cuando decía: «Como todas las demás partes de la física, la mecánica cuántica no se ocupa sino de relaciones entre cosas físicas: todas sus afirmaciones pueden hacerse sin referirse a observador alguno. Y la perturbación debida a la observación (que, ciertamente, es uno de los hechos básicos aseverados por esta mecánica) es un asunto enteramente físico, que no incluye referencia de ninguna clase a efectos que procediesen de seres humanos en cuanto observadores ... El instrumento de medición perturba, pero no por ser un instrumento usado por observadores humanos, sino por ser una cosa física como todas las demás cosas físicas».

Y sigo también la actitud de Margenau ([18]) cuando preguntaba «si la física ha comenzado seriamente a describir el conocimiento humano, que forma un aspecto subjetivo de la inteligencia, a base de ecuaciones diferenciales que incluyan constantes físicas. Lo que quiero señalar es que no estamos obligados a llegar a esta conclusión», en lo cual estoy absolutamente de acuerdo; pues la teoría cuántica se ocupa de situaciones objetivas, y no de paquetes de expectación que se extendiesen por el espacio y se extinguiesen en un colapso como debido a cierto tipo de telepatía. El teórico cuántico, como todo hombre de ciencia, coordina entre sí datos registrados mediante instrumentos (macrofísicos), los cuales son «objetivos», esto es, *reproducibles* mediante repetición inmediata del mismo ensayo con el mismo objeto, aun cuando con frecuencia sea difícil o imposible reconocer con «el mismo instrumento» que «el mismo átomo» se encuentra en «el mismo estado».

Es cierto que el resultado que se obtenga (el que una partícula pase o no pase un ensayo individual) no estará determinado unívocamente por su estado anterior, sino gobernado estadísticamente; no obstante lo cual, expresiones tales como incertidumbre, probabilidad, expectativa, etc., que poseen cierto tinte subjetivo, significan relaciones estadísticas de *datos objetivos* registrados en muchos experimentos reales, recopilados en tablas o representados por medio de funciones. Y el hecho de que el físico tome los resultados estadísticos como materia de reflexión, cálculos o expectativas personales, o bien como albures relativos a ensayos futuros, etc., es inesencial, y ni siquiera característico de la teoría cuántica: toda ley clásica (como, por ejemplo, $e = \frac{1}{2}gt^2$) es primeramente un resumen generalizado de la experiencia adquirida, y puede también usarse para planear otros experimentos futuros. El que los albures de las expectativas se encuentren dispersos estadísticamente en un margen bastante am-

plio o confinados en un solo valor con toda certidumbre es una cuestión de grado (por más que sea de importancia vital para el científico); pero, con todo, la teoría cuántica, igual que la clásica, pone en relación datos registrados mediante instrumentos, y hablar de paquetes de ondas de expectativa en el espacio, o en el cerebro del observador, es tan tortuoso como lo sería hablar de que los seis hilos de expectativa de un juego de dados se rompen repentinamente cuando se lanza el dado (o cuando un observador ve que se lo lanza). Las nociones de este tipo son residuos de los días de esplendor de la teoría, cuando se creía que las funciones ψ describían estados físicos de vibración ondulatoria; pero, en realidad, tales funciones son tablas de albures dotados de una dirección vectorial (con objeto de que encajen en el esquema de la transformación unitaria).

Entonces, ¿por qué se discute tanto acerca del significado de las mediciones atómicas? Según parece, la razón reside en haber vinculado erróneamente el dato físico A_k (manifestado en un medidor de *A)* con un conjunto de *posibles* datos futuros, B_1, B_2, ..., que habrán de hallarse mediante una medición efectuada con un medidor de *B* (vinculación que está descrita por la función $\psi(A_k, B_j)$, siendo *B* un observable cualquiera. Cuando se usa ψ como representación matemática del estado físico A_k no hay nada que decir; pero cuando se piensa que una función determinada, $\psi(A_k; q, t)$, es esencial para caracterizar el estado A_k, se abren las puertas a las malas interpretaciones, y tanto más cuanto que a esta ψ particular se le atribuyen, al menos, siete significados distintos (que enumeramos en el apartado 42). Así, una de estas formas de malinterpretar las cosas consiste en el mito de que ψ describiría un estado físico de cierta materia extendida en el espacio y el tiempo (o en el pensamiento de alguien acerca del espacio y el tiempo), que se contraería súbitamente a un punto al registrarse la ubicación de la partícula en el lugar (q, t) —o, acaso, únicamente cuando un observador tome conciencia de tal registro.

Pero oigamos lo que piensa Heisenberg sobre las mediciones atómicas, según cabe inferir de sus escritos:

a) Antes de efectuarse la medición, el estado del sistema está representado por una función $\psi_0(q, t)$; esta ψ_0 cambia con el tiempo, *t*, de acuerdo con la ecuación de onda de Schrödinger, que sería una «ecuación de procesos», representativa de un cambio gradual de estado.

b) Durante el acto de medición, el estado cambia súbitamente, con lo que se llega a una nueva función, $\psi_1(q, t)$; esta alteración brusca recibe el nombre de contracción del paquete de ondas, y no está regida por la ecuación de Schrödinger.

c) Una vez que queda completa la operación de medida (al entrar en la

conciencia de un observador), el estado vuelve a cambiar de modo continuo, pues la función de estado, ψ_1, está sometida a la ecuación de Schrödinger.

Las opiniones se dividen acerca de si la «contracción del paquete de ondas» se produce con la velocidad del pensamiento, en cuanto proceso mental, o con una gran velocidad a través del espacio, en cuanto proceso físico. Heisenberg parece inclinarse a la última opinión, puesto que nos asegura que, pese a la supralumínica velocidad con que acontece, no se viola la teoría de la relatividad, ya que el proceso de contracción del paquete de ondas no puede emplearse para transmitir una señal de un lugar a otro. Por otra parte, nos deja optar en cuanto al instante en que la ecuación de Schrödinger deja de funcionar: si cuando un instrumento registre un nuevo dato o únicamente cuando un observador se percate conscientemente de él.

Afortunadamente, la mecánica cuántica, que tanto debe a Heisenberg en lo que se refiere a su desarrollo como teoría física, dice algo muy diferente:

a') Partamos de que el objeto se encuentre en el estado S_i en que haya salido de un medidor de S. Cabe representar matemáticamente semejante estado, S_i, en cuanto vector en el espacio de la transformación unitaria, por el conjunto de sus componentes con respecto al conjunto ortogonal de estados A_1, A_2, ..., o sea, por $\psi(S_i, A_k)$; pero igualmente cabe representar matemáticamente el mismo estado, S_i, por sus componentes $\psi(S_i, B_j)$, etc.; y es posible escribir cada conjunto de componentes en forma de función, o sea, con $\psi(S_i, A)$, $\psi(S_i, B)$, etc. Todas estas funciones representan el estado S_i como un vector en un espacio de Hilbert.

b') Cuando se efectúa una medición de R, el objeto sale de ella en uno de los estados, R_n, con probabilidad $P(S_i, R_n) = |\psi(S_i, R_n)|^2$; y, a su vez, el nuevo estado R_n puede representarse, en cuanto vector, por el conjunto de sus componentes con respecto a otro conjunto ortogonal cualquiera de estados. Todas las demás consideraciones que se hagan deberán basarse en la mecánica cuántica resumida en *a')* y *b')*, en la que la palabra 'estado' posee un solo significado, a saber, el de estado físico del objeto según lo averigüe un instrumento de ensayo [en *a)*, *b)* y *c)*, en cambio, 'estado' se usa con dos sentidos distintos, el de estado físico del objeto y el de estado de conocimiento de un observador]; lo único que puede averiguar una medición es un estado objetivo, si bien adquirido bajo la influencia del instrumento (por ejemplo, el medidor de *R)*, que produce uno de los estados correspondientes (R_n) de manera impredecible; y a menudo cabe reconstruir posteriormente, valiéndose de esta o aquella teoría, lo que haya sucedido entre las dos mediciones $(S_i$ y $R_n)$.

42. Siete significados de ψ.

No es de extrañar que los errores acerca del papel de la función ψ, con su pretendida contracción súbita, con su contenido mitad físico y mitad psicológico, etc., hayan llevado a la difundida opinión de que la teoría cuántica (y, en particular, la función ψ) es abstracta, bizantina, ficticia, inintuitiva, incomprensible y carente de sentido físico directo, pero que, por razones desconocidas, lleva a los resultados correctos. Creo que el sencillo esbozo de la teoría que hemos presentado en los capítulos anteriores no presta ya apoyo a ese viejo folklore.

Tenemos un testimonio de la confusión actual acerca de ψ en la siguiente lista de siete opiniones sobre lo que describiría esta función:

1) el estado físico de un medio material continuo en el espacio y el tiempo, del cual las partículas serían meras apariencias (Schrödinger, 1926);
2) una onda piloto continua que regiría los sucesos puntuales a lo largo de su recorrido (De Broglie);
3) un fluido en el que habría unas fuerzas cuánticas hipotéticas, inventadas *ad hoc* de modo que determinen su propio movimiento de acuerdo con las leyes de la hidrodinámica (Bohm);
4) *un* estado definido, o una sucesión de *muchos* estados de un objeto, o de una población estadística de objetos (los tratados vacilan entre estas diversas opiniones);
5) un estado ondulatorio en el espacio (por ejemplo, tanto en la parte transmitida como en la reflejada de un «paquete de ondas», en el caso de la reflexión parcial) que se contraería con velocidad supralumínica, o bien cuando tiene lugar cierto suceso puntual (en una de las dos partes), o únicamente cuando un observador tiene conocimiento de ello (las «ondas de expectativas», de Heisenberg, como realidades psíquicas);
6) un símbolo matemático no susceptible de representación intuitiva, completamente abstracto, y en el que, por así decirlo, no habría física alguna; y, sin embargo, completamente «objetivo», ya que no se referiría al conocimiento de ningún observador (Heisenberg, el lenguaje de Copenhague), y
7) la función ψ sería una lista bien ordenada de albures, basados en la experiencia estadística, correspondientes a los diversos resultados de unos ensayos concretos de un objeto microscópico con un instrumento macroscópico.

Sin embargo, aun cuando pueda ser bueno en política «dejar que broten cien flores, y que luchen cien escuelas» (Mao Tse Tung), ello no es suficientemente bueno para la ciencia: en ella sólo la interpretación 7) se mantiene a la altura de una crítica realista que esté de acuerdo con la monolítica mecánica cuántica.

Gran parte de la confusión ha provenido de la temprana —pero errónea— analogía entre las partículas de materia y los fotones, por un lado, y las ondas de ψ y las ondas electromagnéticas, por otro. Pues hay partículas materiales

identificables individualmente (dejan huellas de trayectorias, etc.), pero no hay «fotones» como cosas reales e identificables (según hemos visto en el apartado 36); y, por otra parte, los campos electromagnéticos son cosas reales (susceptibles de puntapié), en tanto que las ondas de ψ son tablas de probabilidades de sucesos, y no cosas reales, como pensó inicialmente Schrödinger. La teoría cuántica puede aplicarse a cosas reales, a partículas de materia de igual modo que a ondas electromagnéticas: en particular, si se analiza el movimiento de un sistema en componentes de frecuencia ν_k, la teoría cuántica dice que puede emitir y recibir energía sólo por cantidades $h\nu_k = E' - E''$; y, análogamente, cabe analizar armónicamente un campo electromagnético o de otra índole en una serie de vibraciones estacionarias de varias frecuencias, ν_k, cuya energía cambie sólo por cantidades cuantizadas, $h\nu_k$, en resonancia con un cambio correspondiente en una partícula material. Pero es preciso no pensar que esta alteración de la energía del campo se produce localmente, como si se engullese o emitiese un «fotón»: la variación de la energía de radiación tiene lugar en la onda estacionaria en conjunto (tal es, al menos, la *teoría cuántica de la radiación* elaborada alrededor de 1930 por Fermi, Heitler, Dirac y otros autores); de suerte que no habría fotones localizados. Por lo demás, la teoría cuántica no considera la creación y aniquilación de partículas materiales como una auténtica creación de la nada (y aniquilación total, volviendo en nada), sino como transiciones de las partículas de energías positivas a negativas, de acuerdo con la teoría de los huecos de Dirac; así pues, la partícula como «cosa» persiste.

Las compañías de seguros poseen tablas permanentes de albures estadísticos en diversas situaciones físicas; y de parecido modo disponen los teóricos cuánticos de tablas y funciones de P y ψ. Pero, lo mismo en la física cuántica que en los seguros, la razón por la que habrían de sufrir un colapso o contraerse semejantes tablas o funciones (es la «imagen» de Heisenberg-Von Neumann: véase el apartado 39) es algo que excede la capacidad de comprensión del autor de la presente obra; lo que «sucede» es que las personas interesadas en apostar sobre el albur de los futuros resultados de las mediciones pueden mirar esta o aquella página de su catálogo de tablas de P o funciones ψ, pero el paso a otra página, erróneamente apodado «contracción de un paquete de ondas», no tiene nada que ver, naturalmente, con ningún proceso físico real. No obstante lo cual, con objeto de dar una apariencia de respetabilidad a la «contracción» se echa mano de la *ambigüedad de los significados de las palabras.* Así, para Heisenberg, 'estado' significa, en primer lugar, estado físico de un átomo, y luego, estado de conocimiento de un sujeto que observe; para preparar esta ambigüedad nos dice que ya el concepto clásico de temperatura unas veces describe el estado físico del sistema y en otras ocasiones el estado de conocimiento o falta de él de un observador, y añade que él considera esta iridiscencia *(das Schillern)* de los sig-

nificados de las palabras como un rasgo esencial de toda teoría estadística. Del mismo tenor es su observación ([19]) de que «Cuando se emplea el viejo adagio 'natura non facit saltus' como fundamento para criticar la teoría cuántica, podemos responder que nuestros conocimientos, sin duda alguna, cambian súbitamente, y que este hecho justifica la expresión de 'salto cuántico'». Mas ¿no existe, realmente, ninguna manera mejor de justificar esta última expresión que referirnos a los cambios súbitos de los conocimientos personales? En un simposio reciente sobre «Observación e interpretación», uno de los participantes señalaba justamente que «Nadie negará que las leyes de la física cuántica eran ya válidas en tiempo de los saurios; pero entonces son leyes objetivas, independientes de los seres humanos y de sus conocimientos»; a lo que otro miembro redarguyó: «Pero sólo unos observadores podrían *conocerlas*». Ahora bien, como la misma observación podría hacerse igualmente con respecto a cualquier ley clásica, y con respecto a cualquier cosa que ocurra en cualquier lugar del universo, carece absolutamente de pertinencia en cuanto a la física cuántica como algo opuesto a la clásica: sólo revela la completa falta de juicio acerca de qué cosas importan y qué no que se produce en cuanto la gente entra en el laberinto de la «filosofía cuántica» de nuestros días. Y vemos la misma falta de sentido en lo que otro intérprete famoso, sir James Jeans, decía a sus fascinados lectores: «Probablemente es tan absurdo tratar del volumen que ocupa un electrón como del volumen que ocuparían un temor, una ansiedad o una incertidumbre». Las declaraciones de este género piden unas represalias masivas.

43. La teoría subcuántica de Bohm.

Cuando se dejan caer bolas sobre un tablero inclinado provisto de clavos (tablero de Galton), llegan a la parte inferior formando una distribución estadística que se conoce con el nombre de ley de Gauss, ley que puede deducirse mediante un razonamiento puramente matemático que parta del supuesto de que cada bola tiene igual probabilidad de desviarse a la derecha que a la izquierda de un clavo cualquiera con el que tropiece; así la distribución de Gauss se reduce a unos fundamentos muy sencillos, y no requiere explicación ulterior alguna. Sin embargo, alguien propone la siguiente teoría «causal»: en primer término, simboliza la distribución gaussiana con un gas; después se pregunta por qué el «gas» que se ha inventado presenta un máximo de intensidad en el centro, en lugar de difundirse por igual, como haría un gas de verdad; y en tercer término, se embarca en la tarea de inventar una distribución de fuerza hidrostática, en el interior del gas que se le ha ocurrido, tal que, *si* existiese, produciría la misma distribución de densidad en el gas real, de acuerdo

con las leyes de la presión de los gases, que la probabilidad 50 : 50 produce de todos modos de acuerdo con *Gauss*. Ahora bien, una fuerza hipotética construida *ad hoc* para un gas inexistente puede poseer un valor estético, e incluso heurístico; pero considerarla como una explicación de la ley de Gauss a un nivel más profundo de comprensión dilataría el significado de las palabras 'explicación' y 'comprensión' hasta hacerlas irreconocibles.

Sucede que la teoría de *Bohm* constituye un análogo exacto de la «explicación causal» anterior de la distribución gaussiana. Pues Bohm reinterpreta primeramente la densidad estadística, $|\psi(q, t)|^2$, de los experimentos *potenciales* como densidad de un fluido; después, cavilando acerca de por qué semejante fluido que se ha inventado no está distribuido con una densidad constante en el espacio y el tiempo (como lo haría un fluido ordinario en ausencia de fuerzas de compresión), pasa a inventar una fuerza hidrodinámica actuante por doquier en el interior de ese fluido de trasfondo y distribuida de tal forma que, *si* existiese realmente, daría lugar, de acuerdo con la dinámica de gases, a la misma distribución espaciotemporal que la que produce la métrica probabilitaria fundamental (y la ecuación de Schrödinger como aplicación especial de ella); y, finalmente, quiere que creamos que las posiciones de las partículas individuales flotan en la corriente de tal fluido de fondo.

Hay tres objeciones fundamentales contra esta teoría. En primer lugar, siguiendo a la mecánica ondulatoria, la imagen de Bohm indica que $\psi(q, t)$ representa un estado real de distribución estadística de partículas sobre q en varios instantes t; pero, en realidad, $\psi(q, t)$ se encuentra en lugar de $\psi(S; q, t)$, que muestra que todas las partículas *están* en el mismo estado, S, y que $|\psi(q, t)|^2$ es la probabilidad que tienen de saltar de S a q en el instante t si alguien *efectuase* unos ensayos de q (y no ensayos de A, en general, ya que q y t no poseen privilegio alguno en la métrica probabilitaria general). En segundo término, difícilmente puede decirse que una «fuerza cuántica» inventada *ad hoc* y reajustada según conviene nos otorgue un conocimiento más profundo del comportamiento de las partículas: se tratará, meramente, de una *analogía* interesante con las leyes de la hidrodinámica, pero que no descansa en razones más fundamentales que las que corresponderían a una «explicación» hidrostática de la distribución de Gauss que se observa en la parte inferior del tablero de Galton. Y, en tercer lugar, Bohm no respeta la simetría de p y q, que es esencial en la mecánica, tanto la clásica como la cuantista.

Así pues, no se ve claramente hasta qué punto la tentativa de Bohm de reducir unas leyes sencillas y elementales de la probabilidad a un substrato determinístico complicado e inventado *ad hoc* podría contribuir a una mejor comprensión del comportamiento estadístico de las partículas atómicas: siempre cabe inventar «parámetros ocultos» al propio arbitrio, y explicar su actuación cau-

sal mediante otro conjunto de parámetros aún más ocultos (todo ello sin necesidad de confirmación experimental, justamente por ser «ocultos»). Por lo demás, si en ciertos círculos se señala jubilosamente que «Bohm ha demostrado que, pese a todo, es posible una explicación causal de la teoría cuántica», basta con que respondamos que esa «explicación causal» viola las normas del método científico, que dicen: «No se traten de explicar resultados sencillos mediante hipótesis complicadas inventadas *ad hoc*».

Por otra parte, mi razón particular para considerar fútil la búsqueda bohmiana de una teoría subcuántica es el innegable hecho de que el formalismo cuántico, que en otro tiempo parecía tan arbitrario e inventado *ad hoc,* resulta estar anclado en una base no cuantista de gran generalidad y simplicidad, que difícilmente cabe sobrepasar: el postulado de invariancia con respecto a los desplazamientos de los puntos origen tendría que conservarse incluso en el vago plan existente de atomizar el espacio y el tiempo mismos (cualquiera que sea el significado de semejante cosa); y sin la simetría, $P(A \rightarrow B) = P(B \rightarrow A)$, no habría estados de equilibrio, y toda la termodinámica estadística se hundiría en ruinas. ¿Qué quedaría por modificar? Al autor le parece que lo expuesto en los capítulos anteriores proporciona justamente ese nivel subcuántico que andan buscando Bohm y sus partidarios: mientras sean válidos los postulados no cuantistas que subyacen a las reglas cuánticas formales, éstas no variarán, por más que lo hagan los objetos (partículas o campos) a que se apliquen.

44. La complementaridad universal de Bohr.

Uno de los logros más notables de la física cuántica ha sido el descubrimiento de que las coordenadas, q, y los momentos, p, son incompatibles: es decir, que no es posible preparar ni *predecir* estados simultáneos qp. Ello presenta, ciertamente, gran interés físico, tanto como el opuesto resultado de que la energía, E, el momento angular, A, y la componente según z de A son compatibles (o sea, que hay estados reproducibles de la combinación EAZ. Mas ¿por qué tendría que tener una gran significación *filosófica* que ciertos grupos de observables sean compatibles y que otros no lo sean? Los datos de flexibilidad y de transparencia óptica de una placa de celuloide son compatibles, mientras que los de flexibilidad y calor de combustión no lo son; lo cual constituye un detalle técnico muy importante, pero no afecta a la teoría del conocimiento del modo que, según se dice, lo afecta la incompatibilidad de qp. Tampoco hay razón alguna para que se altere «La visión física del mundo» porque resulte haber una *ley* que vincula diversas probabilidades, ni porque la mejor manera de expresar esta ley de «transformación unitaria» entre los cuadrados mágicos

unitarios de P sea a base de una ley geométrica que atribuya a cada P una dirección *vectorial* en una estructura plana, denotada por el símbolo complejo ψ. Por consiguiente, no soy capaz de advertir que «la estructura lógica (?) de la mecánica cuántica ha efectuado unos profundos cambios en nuestro pensamiento científico» (Bohr): también son incompatibles los datos de flexibilidad y de calor de combustión de los materiales plásticos, pero su incompatibilidad no ha causado nunca profundos cambios en nuestro pensamiento científico; ni tampoco cambia nuestra *forma de pensar* cuando vemos que los experimentos microfísicos tienen el carácter de juegos de azar (corrientes), salvo si sustentamos la errónea noción de que la distribución estadística cuantista no puede reducirse jamás a una interpretación determinista, en tanto que las distribuciones estadísticas clásicas sí podrían (en realidad, la diferencia que existe entre un juego de azar corriente y un juego atómico de *pq* es técnica, y no esencial: este último constituye una innovación física, pero no nos proporciona una lección epistemológica).

Uno de los espíritus más creadores y críticos de todos los físicos teóricos, Fritz London, escribió ya en 1937 al autor (que por aquel entonces adoraba la complementaridad): «Por serle franco, no me agrada lo más mínimo la complementaridad de las imágenes ondulatoria y corpuscular. Según yo lo veo, se trata de muletas que al principio nos sirvieron para familiarizarnos con las ideas cuánticas, pero que ya no corresponden a la situación actual». El prolongado esfuerzo por salvar el dualismo y la complementaridad manteniendo que ninguna de las dos «imágenes» es verdadera ha terminado por producir un eclipse casi total de la curiosidad intelectual acerca de *por qué* las partículas producen apariencias estadísticas a modo de ondas; de suerte que la meta primaria, en lugar de ser el sacar a luz unas correlaciones más profundas que den lugar a las apariencias dualísticas, ha consistido en defender y ampliar la doctrina de la dualidad y la complementaridad. Niels Bohr, en particular, cree haber encontrado confirmaciones de la complementaridad no sólo en la física atómica, sino también en otros dominios del conocimiento humano (en la biología, la psicología, la sociología, etc.): «Podemos decir, en verdad, que las distintas culturas humanas son complementarias entre sí», y otros ejemplos serían «la justicia frente a la caridad» y «el individuo frente a la comunidad a que pertenezca». No es de extrañar que otros autores quieran participar en tal movimiento, por ejemplo Jean-Paul Sartre cuando también veía ([20]) la complementaridad en el eterno contraste del varón y la hembra (y da por supuesto que sabemos cuál es ondas y cuál partículas); y el íntimo colaborador de Bohr, J. A. Wheeler, exclama: «La complementaridad representa, en cierto sentido, la concepción más revolucionaria de nuestros días»; pero no puedo estar de acuerdo con ellos en este sentido general, particularmente en vista de las aceradas observaciones de

K. R. Popper acerca del caso, tan análogo, de las omnivalederas teorías de Freud, Adler y Jung: «Era precisamente este hecho, el de que siempre valían, el de que siempre quedaban confirmadas, lo que a ojos de sus admiradores constituía el argumento más fuerte en favor de estas teorías. Mas comenzó a alborear en mí que esta aparente fuerza era, en realidad, su mayor debilidad». Volvamos, empero, a la física; L. Rosenfeld ([21]) nos informa de que «La idea de la complementaridad es, ante todo, la expresión más directa de un hecho ... por ser la única interpretación racional de la mecánica cuántica» (para mí, la contraposición de una cosa a una de sus propiedades es irracional, y no «la única interpretación racional»); mas Heisenberg ([19]) va todavía más allá, y declara:

«El concepto de complementaridad ... ha alentado a los físicos a emplear un lenguaje ambiguo, a usar los conceptos clásicos de manera algo vaga, conforme al principio de incertidumbre».

Aun cuando es posible que el concepto de complementaridad realmente haya alentado el uso de un lenguaje ambiguo, no me parece que ello sea un gran mérito; más bien uno pensaría que, por el contrario, habría que someter a un cuidadoso examen, en busca de defectos lógicos, cualquier doctrina que lleve a emplear un lenguaje ambiguo; pero Heisenberg, sin embargo, continúa diciendo: «Si este lenguaje vago y asistemático da lugar a dificultades, el físico ha de retirarse al esquema matemático y su inequívoca correlación con la experimentación». Una vez más, lo que yo pensaría es que el físico no necesita retirarse mientras no haya empezado por emplear un lenguaje vago y asistemático, o sea, a menos que haya sucumbido a la crónica enfermedad de confundir la falta de predecibilidad (que es física) con la inexistencia (metafísica), utilice ilógicas contraposiciones de incontraponibles, se permita caer en una física equivocada desconociendo la tercera regla cuántica, etc. Mas cuando Heisenberg, finalmente, generaliza diciendo que «Empeñarse en el postulado de una aclaración lógica completa haría imposible la ciencia», hasta los fieles se detendrán asombrados; y es posible que les entre la tentación de prestar oídos al análisis sociológico de C. Caudwell en *The Crisis in Physics [La crisis de la física]:* «La filosofía de todos los filósofos burgueses en lo que se refiere a la materia es siempre la misma: el materialismo mecánico. Pero, por diversas razones históricas, los filósofos burgueses han dejado de interesarse por la materia y han desarrollado otra parte de la filosofía burguesa, la relativa al alma *[mind]* o realidad subjetiva».

En cambio, L. Rosenfeld ([23]) no ve en la resistencia a aceptar el punto de vista de Copenhague tanto las oscilantes tendencias burguesas cuanto que el hombre occidental se ve afligido por el peso de la lógica aristotélica, frente a lo que sucede con los sabios orientales, con menos prejuicios en favor de la

fría lógica occidental y que, por consiguiente, están mejor equipados para «comprender a Bohr»; pero cuando rechaza como injustificada la tesis de que la doctrina de Copenhague ha «dejado de ocuparse de las cosas y sólo lo hace de la forma de hablar acerca de ellas; con lo que la ciencia se degrada de persecución de la verdad a ejercicio verbal», tal vez podría hacer recaer esta condena de Copenhague sobre sus propias palabras: «Mientras que los grandes maestros [Planck, Einstein, Born, Schrödinger] se dedicaban en vano a intentar eliminar las contradicciones al modo aristotélico, o sea, reduciendo un aspecto al otro, Bohr se dio cuenta de la futilidad de tales tentativas: se percató de que teníamos que convivir con semejante dilema ... y de que el verdadero problema consistía en alquitarar el lenguaje de la física de tal suerte que diese cabida a la coexistencia de ambas concepciones». Frente a esta opinión, lo que yo sustento es que el verdadero problema era el de acabar con las contradicciones mediante la mecánica corpuscular unitaria de las apariencias ondulatorias (Duane), y, luego, el de reducir las reglas cuánticas de la mecánica a una base no cuantista, como proponemos en la presente obra.

45. Un nuevo enfoque de la enseñanza en la mecánica cuántica.

Los tratados de teoría cuántica comienzan presentando unos pocos resultados experimentales característicos, haciendo un hincapié particular en el contraste entre las trayectorias de las partículas en las cámaras de niebla y de burbujas y los máximos y mínimos de intensidad de las figuras de difracción; tras de lo cual, en lugar de concluir, simplemente, que en semejantes apariencias ondulatorias se encuentra *algo periódico* (a saber, las reglas cuánticas que vinculan la periodicidad de los cuerpos en el tiempo y en el espacio con su actividad de momento y de energía), se expone al estudiante a la equivocada física según la cual cada partícula es una ondícula (o se manifiesta como tal), y a la evasiva filosofía del dualismo, para la cual es absurdo preguntar cuál es la verdadera constitución de la materia, etc. Tras haberlo adoctrinado suficientemente, el estudiante está ya dispuesto a aceptar las diversas reglas del cálculo de matrices y de operadores, juntamente con la ecuación de Schrödinger, al pie de la letra. Una conocida autoridad, F. Dyson ([24]), confirma e incluso alienta esta falta de comprensión al escribir aprobatoriamente: «El estudiante comienza por aprender las triquiñuelas del oficio ... Luego empieza a preocuparse, pues no comprende lo que hace; estadio que dura a menudo seis meses o más, y es agotador y desagradable. De repente, inesperadamente, ... se dice a sí mismo: 'Comprendo la mecánica cuántica', o más bien: 'Ahora comprendo que no hay nada que comprender' ... En cada nueva promoción de estudiantes hay

menos resistencia que quebrantar para que se sientan a gusto con las ideas cuánticas». Pero nada de esto nos divierte, pese al hecho de que la última frase confirma alborozadamente la herencia de los caracteres adquiridos de una generación a otra, incluso de unos caracteres tan perjudiciales como el de ser quebrantado hasta llegar a *no entender,* y, sin embargo, «sentirse a gusto con las ideas cuánticas». Frente a lo cual, creo que tenemos el deber de informar desde un principio al estudiante que la teoría cuántica *se puede* entender sin artificios lingüísticos ni manifestaciones duales, que las leyes de conservación de la mecánica son también válidas en los dominios atómicos, que existen unas reglas probabilitarias cuánticas especiales que restringen su aplicación, que las reglas de selección ($\Delta E = h\nu$, etc.) *se pueden explicar* como consecuencia de los postulados regulativos de simetría e invariancia, y, finalmente, que la teoría vincula entre sí datos reales de instrumentos, y no estados mentales de observadores. En conjunto, el esperar que el estudiante, como un buen soldado cuántico, no pregunte nunca por qué puede tener su atractivo para quienes tengan mucha prisa en aprender «las triquiñuelas del oficio»; pero sigo creyendo que en un enfoque sistemático que parta desde los fundamentos no sólo es intelectualmente satisfactorio, sino que ahorra tiempo. No estoy pensando en libros tan sumamente matemáticos y abstractos como los de Von Neumann y Ludwig, que, naturalmente, no han pretendido nunca dirigirse al principiante: encontramos un ejemplo típico de enfoque mucho más breve, y, sin embargo, sistemático, en el análisis de Margenau de los rasgos esenciales del formalismo cuántico, que le ha llevado a los cuatro axiomas siguientes (que aquí citamos sin texto alguno explicativo):

Axioma I. A todo observable físico corresponde un operador matemático; en particular, al observable p (= momento) corresponde el operador diferencial $(h/2i\pi)\partial/\partial q$, siendo q la coordenada espacial conjugada de p.

Axioma II. A todo estado físico, S, de un sistema mecánico corresponde una función matemática, $\psi_B(q)$; en particular, la función de estado correspondiente a un estado tal que el valor de su momento sea p es $\psi_p(q) = \exp(2i\pi pq/h)$, en virtud del operador p del axioma I.

Axioma III. Los únicos valores que puede proporcionar la medición de un observable físico son los autovalores del operador correspondiente.

Axioma IV. Sea A un observable de autovalores A_n, correspondientes a las autofunciones $\psi_n(q)$. La *probabilidad* de encontrar el valor $A = A_n$ cuando el sistema se encuentre en el estado S y se lo someta a una medición de A es $P_S(A_n) = |\psi_S(A_n)|^2$, siendo $\psi_S(A_n) = \int \psi_S \psi_n(q) \cdot (q) \cdot dq$.

Verdaderamente, no hay que reprochar error alguno a estas cuatro proposiciones. Lo único que sostengo es que, en cuanto introducción, o como esfuerzo por reducirse a lo esencial, no eliminan de los fundamentos el elemento

ad hoc: así, el adepto preguntará *por qué* tiene que admitir que a cada observable le corresponda un «operador», e incluso al experto le gustaría saber unas razones más elementales de la correspondencia del operador diferencial $(h/2i\pi)\partial/\partial q$ con el observable p. En realidad, el axioma I contiene la mayor parte de la teoría atómica, encerrada en una cáscara de nuez e introducida por un *fiat,* en vez de estar deducida de una base no cuantista; el axioma IV introduce la superposición de las amplitudes probabilísticas, mas de nuevo mediante un *fiat,* y no se menciona la importante simetría bilateral de las probabilidades. Así pues, como según Margenau, «un axioma es cualquier proposición de contenido físico o matemático que no pueda deducirse de otras proposiciones», las que él presenta, numerándolas de I a IV, no pertenecen a tal clase. Vamos a presentar una contrapropuesta muy breve, ya que en los capítulos anteriores hemos tratado sus pormenores; y tiene el siguiente tenor:

La mecánica cuántica elemental de la materia se ocupa de cuerpos materiales formados por partículas de coordenadas y momentos respectivos q y p, y de diversas magnitudes observables, A, B, C, ..., definidas como funciones de las q y las p. Toda magnitud observable, A, puede tener muchos valores, A_1, A_2, A_3, y así sucesivamente; y el que estas características o «autovalores» formen una continuidad o un conjunto discreto depende de las peculiaridades del sistema y del observable, A, de que se trate. (Todo esto es trivial.)

I) El hecho de que en el dominio atómico haya «observables», en el sentido estricto de que estén mutuamente vinculados por unas relaciones probabilísticas definidas, es, en cambio, de gran importancia. Dicho más específicamente: una vez que una medición de A ha proporcionado el valor $A = A_k$, las mediciones de B subsiguientes dan lugar a una *distribución estadística* entre los valores B_1, B_2, ..., a la que corresponden unas frecuencias relativas $P(A_k \rightarrow B_j)$; además, las probabilidades, P, que vinculan los diversos valores de A con los de B pueden disponerse en una matriz, $(P\ \ )$, cada una de cuyas *filas* sea tal que la suma de sus elementos sea la *unidad.* (Para simplificar, supongamos que las matrices de P son finitas.)

II) En correspondencia con la reversibilidad clásica de los procesos mecánicos, existe un teorema acerca de la *simetría bilateral* de las probabilidades, $P(A_k \rightarrow B_j) = P(B_j \rightarrow A_k)$, de suerte que se pueden omitir las flechas de esta notación. Una consecuencia inmediata de tal simetría es que no sólo los elementos de cada fila suman la unidad, sino que lo mismo sucede con los de cada columna; y asimismo que las filas y las columnas poseen el mismo número de elementos, M. Dicho de otro modo, las matrices de P son *cuadrados de suma unidad* (doblemente estocásticos), y todos los observables, A, B, etc., tienen los autovalores con *la misma multiplicidad, M* (de hecho, en muchos ca-

sos M es infinita). Sin la simetría de las P no podría existir equilibrio estadístico alguno.

III) Introducimos ahora el supuesto o postulado de que las diversas matrices de P son mutuamente *interdependientes,* de modo que la matriz (P_{AC}) se encuentre determinada (o, al menos, sometida a restricciones relativas a sus elementos) cuando se den (P_{AB}) y (P_{BC}). La ley de interdependencia ha de ser general, esto es, *simétrica* con respecto a los varios observables A, B y C, y *transitiva,* de forma que sea igualmente válida para cualquier otra combinación de observables: A, B y D; B, C y D, etc. Ahora bien, no hay sino un solo teorema posible de interdependencia entre cuadrados de suma uno que satisfaga las condiciones de generalidad (la simetría y la transitividad): es el teorema de la transformación ortogonal, juntamente con su generalización, la transformación unitaria; el primero se vale de cosenos reales simétricos, $\alpha(A_k \rightarrow B_j) = \alpha(B_j \rightarrow A_k)$, y de $P = \alpha^2$, en tanto que el segundo lo hace de unos cosenos complejos hermíticos (que son simbólicos), $\psi(A_k \rightarrow B_j) = \psi^*(B_j \rightarrow A_k)$, y de $P = |\psi|^2$, siendo las ψ las «amplitudes probabilísticas».

IV) Si bien la magnitud ψ representa también el «tensor unidad», en el que $\psi_{kk'} = \delta_{kk'}$, el observable A representa un tensor en general, con A_1, A_2, ..., como valores principales o «autovalores», mientras que los componentes tensoriales $A_{mn} = A_{nm}$ representan los valores medios de A en la transición del estado m al n. Un problema muy frecuente es el de averiguar los autovalores cuando se da un conjunto de valores de transición, lo cual se consigue mediante una «transformación a los ejes principales».

V) La dinámica cuántica ha de ser invariante con respecto a desplazamientos de los puntos origen en el espacio de q y en el de p, así como frente a desplazamientos de los puntos origen de la energía y el tiempo: ha de poseer, pues, la invariancia de Galileo y/o la de Lorentz; en particular, todo observable $S(q)$ ha de poseer valores de transición, $S_{pp'}$, que sólo dependan de $p - p'$, y todo observable $T(p)$ ha de tener valores de transición, $T_{qq'}$, que sólo dependan de $q - q'$. Este requisito conduce, con necesidad matemática, a la conclusión de que ψ_{pq} tiene que tener una forma periódica compleja, $\psi_{pq} = \exp(ipq/C^{te})$, en la que la constante (que tiene las dimensiones de una acción) se denota usualmente con $h/2\pi$. Con lo cual se acaba de deducir la mecánica cuántica de una base constituida por unos sencillos postulados no cuantistas; y si en ocasiones el método matemático de la teoría cuántica presenta un aspecto muy abstracto (las magnitudes observables se sustituyen por operadores simbólicos sujetos a un algoritmo no conmutativo en el que entra la constante de Planck), cabe asegurar que este lenguaje matemático no es otra cosa que una notación estenográfica con la que se formulan relaciones que igualmen-

te podrían reducirse a sumas y multiplicaciones ordinarias de diversos datos (si se dispusiera de papel, tinta y paciencia suficientes).

RESUMEN

Al revés de lo que sucedía con los capítulos anteriores, cuyo contenido era físico, éste constituye una requisitoria de la filosofía cuántica usual de Bohr, Heisenberg y sus secuaces; y se apoya en dos argumentos principales:

1) El abandonar la búsqueda de una realidad física objetiva y detenerse una vez halladas dos imágenes subjetivas constituye una metafísica dudosa.

2) El desconocer la tercera regla cuántica, que es la clave de toda explicación mecánica unitaria de los fenómenos de aspecto ondulatorio y acaba con la barroca hipótesis de la doble manifestación, constituye una física dudosa.

Mas, en concreto, lo que yo objeto a la *lógica cuántica* es que

3) ve una simetría dualista entre una cosa (una partícula susceptible de puntapié) y una curva simbólica de aspecto ondulatorio (y no susceptible de puntapié alguno) que representa probabilidades de sucesos atómicos;

4) sustituye los datos de distribución estadística, cuya previsión es incierta, por la indeterminación de su existencia, y, en particular, declara que el momento del electrón, por más que quepa medirlo a base de su deflexión, es un momento absurdo o inexistente; "renuncia" que presenta como un descubrimiento filosófico;

5) sólo tiene en cuenta "mediciones directas", si bien, *de hecho*, en toda medición hay ingredientes indirectos, pues sólo las mediciones de (q, t) —o sea, de coincidencias— son directas;

6) niega que suceda nada entre dos mediciones, pese a que, en realidad, cabe reconstruir lo sucedido entre dos mediciones directas, de (q, t), en forma de una trayectoria exacta entre ambas;

7) presenta las relaciones $E = h\nu$ y $p = h/\lambda$ como si vinculasen dos imágenes subjetivas, pese a que son *reglas cuánticas objetivas*, $\Delta E = h/\tau$ y $\Delta p = h/L$, que no tienen nada que ver con "imágenes" algunas, sino que representan la actividad de los cuerpos periódicos en el tiempo y en el espacio (osciladores, cristales, etc.);

8) mira la "segunda cuantización" como un argumento en favor de la naturaleza dual de la materia, siendo así que, en realidad, no es sino una transformación matemática de la teoría del modelo atómico de Rutherford en un esquema formal complicadísimo, al que podrían adjuntársele docenas de otros formalismos igualmente complicados;

9) acepta como demostración de la proporcionalidad inversa de δE y δt

un argumento que emplea la proporcionalidad directa de esas dos cantidades;

10) considera esclarecedora la historia del paquete de ondas de conocimiento —o de falta de conocimiento— que se contraería con velocidad supralumínica, aunque, en realidad, semejante residuo de la difunta idea de las ondas de materia se ha convertido en un batiburrillo de incoherencias que se apoya en alteraciones arbitrarias de los significados de las palabras;

11) cree que en las mediciones atómicas queda involucrada la conciencia de observadores humanos, si bien no hay necesidad alguna de una conciencia para efectuar una medición ordinaria;

12) declara que la cuestión de la constitución real de la materia es absurda, sostiene que "el verdadero problema consiste en alquitarar el lenguaje de la física" y que es preciso dejar de "pensar en objetos" y de "empeñarse en el postulado de una aclaración lógica completa", y

13) se permite "licencias físicas y epistemológicas ... tratando de satisfacer, a la vez, a las doctrinas positivistas, realistas e idealistas" [W. Yourgrau ([25])], lo cual da como resultado una caprichosa fusión de ideas contradictorias que ninguna dialéctica puede reconciliar.

Cuando se la limpia de connotaciones anticuadas y del lastre ideológico procedente de mil novecientos veintitantos, la teoría cuántica de la materia se nos ofrece como una teoría unitaria coherente de las partículas y los sistemas de partículas materiales, con reglas estadísticas que ponen en relación sus reacciones con los instrumentos de observación; y los principios cuánticos, lejos de ser axiomas irreducibles, pueden deducirse de una base no cuantista muy sencilla. El principal objeto de la presente obra es esta *desmistificación* de la mecánica cuántica, y no la operación de *raer mitos* a que se ha dedicado el último capítulo.

APÉNDICE 1

La interferencia de probabilidades

La ley de la interferencia de probabilidades se encontró originalmente como una peculiaridad de la mecánica cuántica, a modo de suplemento de la ecuación de Schrödinger, y descansaba en una *analogía* ondulatoria. Mas para mostrar que la interferencia de las P constituye una consecuencia natural del esquema probabilístico que hemos venido trazando, añadiremos el postulado siguiente: *las diversas tablas (matrices estocásticas) de P forman un grupo conectado por una sola operación general, simétrica respecto de todos los observables, A, B, C, ...*

Hacemos hincapié, ante todo, en la palabra 'general'; pues cabe siempre construir, con un poco de ingenio matemático, un grupo de matrices de P de algún tipo especial: por ejemplo, un conjunto en el que toda matriz tenga iguales elementos —distintos de cero— en todas las filas y todas las columnas, o posea otras simetrías de orden elevado; pero tales soluciones no son *a priori* apropiadas para representar las diversas probabilidades que vinculan parejas de observables de la más diversa índole. Sin embargo, pese a la diversidad de las distintas tablas de P, postulamos que su interdependencia ha de ser *simétrica* con respecto a cualesquiera intercambios entre las $A, B, C, \ldots$, que se produzcan por efecto de la aplicación repetida de una operación generatriz única, $\vee$,

$$P_{AB} \vee P_{BC} \rightrightarrows P_{AC} \qquad (1)$$

en donde '$=$' indica la determinación unívoca y '$\rightarrow$' la multívoca por efecto de la operación $\vee$.

El requisito de generalidad implica la exclusión de soluciones particulares que se basen en la intuición matemática. En cuanto al carácter directo (frente a la artificialidad), es difícil definirlo exactamente, pero es vital para la construcción de una teoría física creíble —si bien no constituye restricción cuantista alguna.

En la búsqueda de un operador $\vee$ que satisfaga los requisitos de generalidad y de simetría, la restricción a la determinación multívoca ($\rightarrow$) es demasiado vaga para comenzar por ella, y, sin duda alguna, exigiría un ingenio particular. Ocupémonos primero, pues, de la determinación unívoca ($=$), que, sin embargo, aplicaremos a las magnitudes llamadas ψ, que más tarde podremos identificar con las P o relacionarlas con ellas.

La operación que queremos conseguir,

$$\psi_{AB} \vee \psi_{BC} = \psi_{AC'} \tag{2}$$

elimina la *B* «intermedia», que podría reemplazarse, pues, por cualquier otra magnitud *(D, E,* etc.); y la ecuación (2) satisface la primera condición necesaria para que las cantidades ψ formen un grupo, a saber, la asociatividad (precisamente por contraer *AB* y *BC* en *AC).*

La segunda condición para que estas cantidades constituyan un grupo es que entre ellas se encuentre un elemento neutro o identidad, *e,* tal que $e \vee \psi_{AB} = \psi_{AB} \vee e = \psi_{AB}$. Si $e = 0$, '$\vee$' simboliza la adición, $+$; pero si $e = 1$, '$\vee$' simboliza la multiplicación, $\times$. Ahora bien, como entre las matrices *P* se encuentran elementos idénticos, $P_{AA} = P_{BB} = \ldots = 1$, sólo la alternativa

$$\psi_{AA} = \psi_{BB} = \cdots = 1 \tag{3}$$

puede servirnos de modelo para unas matrices iguales a las *P* o relacionadas con ellas; por consiguiente, la ley de composición, $\vee$, tiene que ser la multiplicación simbólica,

$$\psi_{AB} \times \psi_{BC} = \psi_{AC} \,. \tag{4}$$

Asimismo advertimos que de la ecuación (4) se siguen

$$\begin{aligned} \psi_{AC} \times \psi_{CB} &= \psi_{AB} \\ \psi_{CA} \times \psi_{AB} &= \psi_{CB} \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Mas la única multiplicación simbólica coherente de matrices es la usual de filas por columnas, con la que la ecuación (4) dirá explícitamente

$$\sum_{\beta} \psi_{\alpha\beta}\, \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\alpha\gamma} \tag{6}$$

(Una vez más: con suficiente ingenio matemático cabría encontrar otros tipos de multiplicación *simbólica* que valiesen para tipos especiales de matrices ψ que satisfagan las condiciones de grupo y de simetría.)

La tercera condición para que varios elementos formen un grupo es que cada uno de ellos tenga un elemento *inverso.* Pero esta condición se satisface ya: el inverso de ψ_{AB} es ψ_{BA}, puesto que la ecuación (4) y la (3) dan juntamente

$$\psi_{AB} \times \psi_{BA} = 1 \,, \tag{7}$$

o bien, escrito en forma desarrollada,

$$\sum_{\beta} \psi_{\alpha'\beta}\, \psi_{\beta\alpha''} = \psi_{\alpha'\alpha''} = \delta_{\alpha'\alpha''} \tag{8}$$

En conclusión: el teorema del producto representado en la ecuación (4), incluyendo el caso especial de la ecuación (7), es la única forma de vincular matrices cuadráticas ψ (incluyendo $\psi_{AA} = 1$) mediante una ley de composición unívoca que las ponga en interdependencia y posea unas propiedades de grupo *simétricas* en *A, B, C, ...* —todo ello en el marco de una teoría que excluya las construcciones especiales y artificiales.

Las cantidades ψ no pueden identificarse con las *P,* ya que estas últimas son positivas, mientras que tiene que haber también ψ negativas (o, posiblemente, complejas) para que la suma de productos de la ecuación (8) dé *cero* cuando $\alpha' \neq \alpha''$. Y puesto que el teorema de las ψ es el único unívoco que satisface las condiciones enumeradas, *la interdependencia entre las P no puede ser unívoca;* no obstante lo cual, cabe relacionar su vinculación mutua con la vigente entre las ψ, que sí lo es, como puede verse en la tabla siguiente:

teorema de las ψ ley de las *P*	1) triangular 1) triangular	2) simétrico 2) simétrica	3) transitivo 3) transitiva
	(ambos iguales)	(iguales)	(iguales)
teorema de las ψ ley de las *P*	4) $\Sigma \lvert\psi\rvert^2 = 1$ 4) $\Sigma P = 1$	5) unívoco 5) no unívoca	6) $(\psi AA) = (1)$ 6) $(PAA) = (1)$
	(iguales)	(diferentes)	(iguales)

Esta tabla sugiere una solución sencilla y general del problema de la interdependencia multívoca entre las *P,* a saber, el de hacer

$$P_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}\,\psi_{\beta\alpha} = P_{\beta\alpha}; \tag{9}$$

por consiguiente, o bien $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$, o, de un modo más general, admitiendo que las ψ puedan ser complejas (y señalando con '*' la compleja conjugada),

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi^*_{\beta\alpha} \text{ (hermiticidad).} \tag{10}$$

Una vez más, la ecuación (9) no constituye la única solución matemáticamente posible del problema de la interdependencia entre las matrices de *P;* pero es la única a la que se llega de una manera sencilla y directa, sin apelar a la intuición matemática: es la solución «natural» cuando se asume el —acaso algo metafísico— supuesto de que *las leyes básicas de la física son sencillas,* y de que las complicaciones son siempre signo de que no se ha llegado aún a un nivel fundamental.

En el capítulo VII se verá por qué «la Naturaleza se provee» de transformaciones unitarias entre cantidades ψ complejas, en lugar de contentarse con transformaciones ortogonales de ψ reales.

APÉNDICE 2

El formalismo tensorial

Si la métrica probabilitaria de la teoría cuántica es isomórfica con la «transformación unitaria» en un espacio de Hilbert M-dimensional, lo mismo sucederá con otras partes de la mecánica cuántica. En particular, los observables desempeñan el papel de tensores de la siguiente manera. Existen varios conjuntos de ejes ortogonales, el conjunto $a_1, a_2 \ldots, a_M$, el conjunto $b_1, b_2, \ldots, b_M$, etc., que hemos caracterizado como «conjuntos ortogonales» en virtud de las relaciones entre cosenos «generalizadas», o relaciones ψ,

$$\psi_{aa'} = \delta_{aa'}, \psi_{bb'} = \delta_{bb'}, \text{ etc.}, \tag{1}$$

juntamente con la condición hermítica, $\psi_{ab} = \psi^*_{ba}$; los M ejes a apuntan en las direcciones en las que cierto tensor, A, posee los valores característicos, principales o autovalores:

$$A_{aa'} = 0 \text{ para } a \neq a', \text{ pero } A_{aa} = A_a \tag{2}$$

$$A_{bb'} = A^*_{b'b}, \text{ y asimismo } A_{bc} = A^*_{cb} \ . \tag{3}$$

A las cantidades complejas (3) se les llama *valores de transición,* o valores medios de A en la transición del estado b al c (o viceversa); y por ello cabe denominar a los autovalores A_a como los valores de transición del estado a a él mismo, teniendo en cuenta la razón física siguiente.

Supongamos que se averigua que el átomo (o, en general, el sistema mecánico) que estemos considerando se encuentra en el estado b, o sea, en uno de los autovalores del observable B, dotado del autovalor B_b; ahora se lo somete a ensayo con un medidor de A, que podrá arrojar cualquiera de los resultados A_1, A_2, etc., correspondientes a los estados resultantes a_1, a_2, etc., a los que llegará con probabilidad P_{ba}. El valor medio de A que se obtenga en una serie de ensayos de este tipo, partiendo siempre del estado b, será $\Sigma_a P_{ba} \cdot A_a$ (las sumas abarcan siempre el conjunto completo de los estados ortogonales pertinentes, en este caso a_1, a_2, ...); ahora bien, esta última expresión es la definición del valor medio de A en el estado b, o sea, del valor medio de A en la transición del estado b a sí mismo; valor que se designa con

$$A_{bb} = \Sigma_a P_{ba} A_a = \Sigma_a \psi_{ba} A_a \psi_{ab} \ . \tag{4}$$

Por consiguiente, su generalización natural dentro del cálculo tensorial es

$$A_{bc} = \Sigma_a \psi_{ba} A_a \psi_{ac}, \tag{5}$$

a la que se conoce con el nombre de valor medio de A en la transición del estado b al c, o, dicho brevemente, con el de *valor de transición* de A desde b a c. Así hemos expresado el valor de transición, A_{bc}, a base de los autovalores de A; mas también cabe expresarlo a base de otro conjunto de valores de transición, A_{mn}, desde los autovalores de un observable cualquiera, M, a los de cualquier otro, N:

$$A_{bc} = \Sigma_m \Sigma_n \psi_{bm} A_{mn} \psi_{nc} \; (= \Sigma_k \Sigma_l \psi_{bk} A_{kl} \psi_{lc}). \tag{6}$$

(Recuérdese, una vez más, la última frase del apéndice 1.)

APÉNDICE 3

La función de onda

Es posible deducir la función de amplitud probabilística, juntamente con el hecho de que la transformación unitaria compleja (y no la ortogonal, real) sea básica para la mecánica cuántica, del siguiente postulado —o definición— del par conjugado de una coordenada lineal, q, y un momento, p: los valores de transición (= componentes tensoriales), $T_{pp'}$, de cualquier observable $T(q)$ han de depender únicamente de $p - p'$, y los valores de transición, $S_{qq'}$, de cualquier observable $S(p)$ han de depender únicamente de $q - q'$.

Empezamos por una fórmula general, válida tanto para la transformación unitaria como en el caso particular de la ortogonal, y en la que usaremos integrales en lugar de signos de sumación:

$$T_{pp'} = \int \psi_{pq}\, T(q)\, \psi_{qp'}\, dq. \tag{1}$$

Si el primer miembro tiene que depender de $p - p'$ para *toda* función $T(q)$, lo mismo ha de suceder en el caso especial de que $T(q)$ sea una función delta, $D(q) = \delta(q - q_0)$, que se anula en todas partes salvo en el punto en que $q = q_0$; de este modo se reduce la última ecuación al simple producto

$$D_{pp'} = \psi_{pq_0}\, \psi_{q_0 p}$$

para cualquier valor elegido de q_0 (que volveremos a escribir q). La pregunta es ahora la de qué función $\psi(p, q) = \psi_{pq}$ que se sujete a la condición de la transformación unitaria (en la que seguimos incluyendo la transformación ortogonal, con ψ real), $\psi_{qp'} = \psi_{p'q}$, satisfará

$$\psi_{pq}\, \psi^*_{p'q} = f(p - p'). \tag{2}$$

Con objeto de averiguarlo, desarrollemos ambos factores en series de potencias de p:

$$\begin{aligned} \psi_{pq} &= a_0[1 + A_1 p + A_2 p^2 + \cdots], \\ \psi^*_{p'q} &= a_0^*\cdot\, [1 + A_1^* p' + A_2^* p'^2 + \cdots]. \end{aligned} \tag{3}$$

(Los coeficientes a_0, lo mismo que las A_1, A_2, ..., son únicamente función de q.) Formemos el producto de las dos series (3) y ordenémoslo con respecto a los términos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc., en p y p'. Entonces, para que el

producto sea función de $p - p'$, lo primero que ha de suceder es $A_1 = -A^*$, es decir, A_1 tiene que ser puramente imaginaria: $A_1(q) = i \cdot \alpha(q)$, siendo $\alpha(q)$ una función *real;* además, para que los términos cuadráticos en p y p' dependan exclusivamente de $p - p'$, es preciso que p y p' aparezcan formando la combinación $p^2 - 2pp' + p'^2 = (p - p')^2$, la cual determina la relación $A_2/A_1 = i\alpha/2$; y continuando de esta manera resultan unos coeficientes A_n tales que la serie (3) representa, simplemente, la función exponencial,

$$\psi_{pq} = a_0(q) \cdot \exp[i \cdot \alpha(q) \cdot p] \tag{4}$$

siendo la función $\alpha(q)$ que aparece en el exponente una función real. Vemos que la forma compleja de ψ_{pq} excluye la transformación ortogonal en beneficio de la transformación unitaria, compleja. Intercambiemos ahora las letras q y p y apliquemos iguales consideraciones; de este modo se llega a

$$\psi_{qp} = b_0(p) \exp[i \cdot \beta(p) \cdot q] = \psi^*_{pq}$$

siendo β una función real de p; por consiguiente,

$$\psi_{pq} = b_0^*(p) \exp[-i \cdot \beta(p) \cdot q]. \tag{4'}$$

Comparando (4) con (4') encontramos que

$a_0(q) = b_0^*(p) = \text{C}^{\text{te}}$ independiente de q y de p, y que
$\alpha(q)/q = -\beta(p)/\text{p} = \text{C}^{\text{te}}$ real;

de suerte que, finalmente, llegamos a

$$\psi_{pq} = \text{C}^{\text{te}} \cdot \exp[ipq \cdot \text{C}^{\text{te}} \text{ real}].$$

(Como es natural, no hay consideraciones teóricas que puedan proporcionarnos el valor de la constante real, que generalmente se escribe $2\pi/h$.) Dado

$$\psi_{pq} = \text{C}^{\text{te}} \cdot \exp(2i\pi pq/h) = \psi^*_{qp}, \tag{5}$$

cualquier función $T(q)$ que se introduzca en el segundo miembro de (1) dará lugar a un valor de $T_{pp'}$, sólo dependiente de $p - p'$; y, análogamente, obtendremos un valor de $S_{qq'}$, dependiente sólo de $q - q'$, cualquiera que sea $S(p)$.

APÉNDICE 4

El espectro másico

Las consideraciones que siguen formulan una propuesta hecha por el autor juntamente con L. H. Thomas, formulación que constituye una primera tentativa, enormemente simplificada, encaminada hacia la obtención de un espectro de las masas de las partículas elementales sin basarse en otro supuesto que el de que todas se caracterizarían por una longitud universal común, o «radio». Si la mecánica, tanto la clásica como la relativista, la determinista o la cuántica, concede iguales derechos a la longitud y al momento, se sigue inmediatamente que una longitud universal, *a,* tiene que verse acompañada por un momento preferente, *b;* y cuando *b* se expresa por *mc* (siendo *c* la universal velocidad de la luz), se llega a una masa preferencial, *m.* Con objeto de sacar partido de la simetría mecánica entre la posición (vector *r)* y el momento (vector *p),* introducimos primeramente unas cantidades sin dimensiones,

$$R = r/a \quad \text{y} \quad P = p/mc \tag{1}$$

que corresponderán a unos elementos de volumen sin dimensiones, en el espacio y el espacio de momentos, respectivamente,

$$dV = dv/a^3 \quad \text{y} \quad dW = dw/(\text{mc})^3. \tag{2}$$

Vamos a acercarnos ahora a la teoría cuántica; independientemente del significado físico que posean los símbolos ψ y χ, se tienen las siguientes fórmulas del análisis de Fourier:

$$\psi\,(R) = (\mu/2\pi)^3/_2 \int\int\int \chi(P) \cdot \exp[i\mu(P \cdot R)]\, dW, \text{ y su inversa,} \tag{3}$$
$$\chi(P) = (\mu/2\pi)^3/_2 \int\int\int \psi(R) \cdot \exp[-i\mu(P \cdot R)]\, dV, \tag{4}$$

que son válidas para cualquier función ψ y su transformada de Fourier, χ, así como para cualquier valor del parámetro numérico μ. Si ψ y χ han de ser amplitudes probabilísticas de la mecánica cuántica, μ será una masa en reposo reducida,

$$\mu = m \cdot 2\pi\, ca/h, \tag{5}$$

en donde *m,* como μ, podría tener un valor cualquiera.

La situación cambia, sin embargo, cuando los elementos de volumen dV

y dW se sustituyen por el elemento de volumen relativista dV_0 y un hipotético dW_0 definidos por

$$dV_0 = dV/\sqrt{R^2 + 1} \quad \text{y} \quad dW_0 = dW/\sqrt{P^2 + 1}. \tag{6}$$

Las ecuaciones (3) y (4), al sufrir la modificación consiguiente, sólo son inversas una de la otra para ciertas *autofunciones,* $\psi = \chi^*$, y para los correspondientes autovalores del parámetro μ. Una investigación matemática realizada por L. H. Thomas y el autor (*) ha revelado que los autovalores son soluciones de las ecuaciones trascendentes que siguen ($\mathscr{J}_0$ e Y_0 son funciones de Bessel):

$$[\mathscr{J}_0(\mu)]^2 \cdot 2\pi\mu = 1 \quad \text{y} \tag{7}$$
$$[Y_0(\mu)]^2 \cdot 2\pi\mu = 1. \tag{8}$$

Los dos siguientes espectros de valores de μ constituyen las soluciones respectivas de tales ecuaciones:

$$\mu = 0{,}16;\ 1.87;\ 2.92;\ \cdots$$
$$\mu = 0{,}03;\ 1{,}38;\ 3{,}42;\ \cdots$$

Puesto que no se conoce la magnitud de la longitud *a,* los valores de μ sólo nos proporcionan las relaciones que guardan entre sí las masas en reposo, $m = \mu h/2\pi ac$; y es significativa la razón entre las dos primeras masas de la serie de Y_0, tan elevada (vale alrededor de 1 : 46), a la que siguen masas más grandes con diferencias aproximadamente iguales. Como es natural, no puede esperarse, sin embargo, que estas especulaciones guarden una relación directa con la realidad, pues sólo pretenden hacer ver que hay una manera sencilla y primitiva de obtener un espectro másico de cierto tipo a partir de la hipótesis de que existan una longitud básica, *a,* y un momento correspondiente, $b = mc$. En realidad, el problema de la razón entre las masas de las partículas elementales es muchísimo más complicada, particularmente dado que lo que se observa como masa en reposo puede encontrarse fuertemente enmascarado por otros efectos; y, además, es posible que las partículas que consideramos elementales sean, en realidad, compuestas. Sería una presunción injustificada, pues, proponer actualmente una fórmula de las razones de las masas que pretendiese llamarse universal.

* A. Landé y L. H. Thomas, *Journal Franklin Inst.,* 231, 1941, 63.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

CAPÍTULO I

1. W. DUANE, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 9, 1923, 158.
2. C. F. VON WEIZSÄCKER, *The World View of Physics*, University of Chicago Press, 1952 [ed. orig: *Zum Weltbild der Physik*, 6.ª ed., Stuttgart, 1954].
3. P. EHRENFEST y P. EPSTEIN, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 10, 1924, 133, y 13, 1927, 400.
4. B. HOFFMAN, *The Strange Story of the Quantum*, Nueva York, Dover Books, 1959 [vers. cast.: *La peregrina historia del átomo*, Madrid, Aguilar, 1953].
5. SIR JAMES JEANS, *Nature*, 8 de septiembre de 1934.
6. S. SCHRÖDINGER, *What is Life*, Cambridge University Press, 1944 [vers. cast.: *¿Qué es la vida?*, 1947].

CAPÍTULO II

1. W. HEISENBERG, *Physics and Philosophy*, Harper Torchbooks, 1958 [vers. cast.: *Física y Filosofía*, Buenos Aires, La Isla, 1959].
2. R. D. BRADLEY, *Brit. J. Philos. Sci.*, 13, 1962, 193; *Mind*, 68, 1959, 193.
3. M. BLACK, en *Determinism and Freedom*, comp. por Sidney Hook, New York University Press, 1958.
4. M. BUNGE, *Causality*, Harvard University Press, 1959 [vers. cast.: *Causalidad*, Buenos Aires, Eudeba, 1961].
5. P. BRIDGMAN, *Sci. Mon.*, 79, 1954, 32.
6. K. R. POPPER, *The Logic of Scientific Discovery*, Londres, Hutchinson, 1956 [versión castellana: *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 1962].
7. N. BOHR, en *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, dir. por P. A. Schilpp, Evanston de Illinois, 1949.
8. J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlín, Springer, 1932 [versión castellana: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, Madrid, C. S. I. C., 1949].
9. L. DE BROGLIE, *La Physique quantique, restera-t-elle indéterministe?*, París, Gauthier-Villars, 1953.
10. P. FEYERABEND, *Z. Phys.*, 148, 1957, 551; G. Schultz, *Ann. Phys.*, 3, 1959, 94.
11. C. S. PEIRCE, citado por *Readings in the Philosophy of Science*, comp. por Philip P. Wiener, Nueva York, 1953.
12. K. R. POPPER, *Brit. J. Philos. Sci.*, 1, 1950, 1.
13. *Determinism and Freedom*, comp. por SIDNEY HOOK, New York University Press, 1958.

CAPÍTULO III

1. *Leibnitz Selections*, comp. por PHILIP P. WIENER, Nueva York, Scribner, 1951.
2. H. REICHENBACH, *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*, University of California Press, 1944.
3. V. HINSHAW, *Philos. Sci.*, 26, 1959, 310.

CAPÍTULO IV

1. A. LANDÉ, *Foundations of Quantum Theory,* Yale University Press, 1955.
2. N. BOHR, *Dialectica,* 2, 1948, 312.

CAPÍTULO V

1. A. LANDÉ, *Foundations of Quantum Theory,* Yale University Press, 1955.
2. E. SCHRÖDINGER, *Statistical Thermodynamics,* Cambridge University Press, 1946.
3. J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Berlín, Springer, 1932 [vers. cast. cit.].
4. L. ROSENFELD, *Science Progress,* 163, 1953, 393.
5. L. ROSENFELD, *Nuclear Physics,* 1, 1956, 139.
6. W. HEISENBERG, *Physics and Philosophy,* Harper Torchbooks, 1958 [vers. cast. cit.].
7. H. REICHENBACH, *The Direction of Time,* University of California Press, 1956.

CAPÍTULO VI

1. N. BOHR, *Atomic Physics and Human Knowledge,* Nueva York, John Wiley, 1958.
2. P. BRIDGMAN, *Sci. Mon.,* 79, 1954, 32.
3. W. HEISENBERG, en *Niels Bohr and the Development of Physics,* Oxford, Pergamon Press, 1955.
4. P. JORDAN, en *The Axiomatic Method,* North-Holland Publ. Co., 1959.
5. J. LENNARD-JONES, *Sci. Mon.,* 80, 1955, 175.
6. W. PAULI, en *Niels Bohr and the Development of Physics,* Oxford, Pergamon Press, 1955.

CAPÍTULO VII

1. C. F. VON WEIZSÄCKER, *The World View of Physics,* University of Chicago Press, 1952 [ed. orig. cit.].
2. F. BOPP, *Heisenberg Festschrift,* Braunschweig, Vieweg, 1961.
3. P. P. EWALD, *Kristalle und Röntgenstrahlen,* Berlín, Springer, 1923.

CAPÍTULO VIII

1. C. F. VON WEIZSÄCKER, *The World View of Physics,* University of Chicago Press, 1952 [ed. orig. cit.].
2. W. HEISENBERG, *The Physical Principles of Quantum Theory,* Chicago University Press, 1930 [ed. orig., *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie,* Leipzig, 1930].
3. SIR JAMES JEANS, *Nature,* 8 de septiembre de 1934.
4. SIR CHARLES DARWIN, en *Observation and Interpretation,* dir. por S. Körner, Butterworths, 1957.
5. M. BORN, *Philos. Quarterly,* 3, 1953, 139.
6. N. BOHR, *Dialectica,* 2, 1948, 312.
7. W. HEISENBERG, en *Niels Bohr and the Development of Physics,* Oxford, Pergamon Press, 1955.
8. W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation,* Oxford University Press, 1936.

9. A. EINSTEIN, en *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (pág. 672).
10. N. BOHR, en *Albert Einstein, Philosopher-Scientist.*
11. R. OPPENHEIMER, *Science and the Common Understanding,* Nueva York, 1953.
12. R. D. BRADLEY, *Brit. J. Philos. Sci.,* 13, 1962, 193.
13. K. R. POPPER, *The Logic of Scientific Discovery,* Londres, Hutchinson, 1956 [versión castellana citada].
14. M. BUNGE, *Brit. J. Philos. Sci.,* 6, 1955, 1 y 141.
15. P. FEYERABEND, *Z. Phys.,* 148, 1957, 551.
16. H. MARGENAU, *The Nature of Physical Reality,* Nueva York, McGraw-Hill, 1950.
17. H. REICHENBACH, *The Philosophical Foundations of Quantum Mechanics,* University of California Press, 1944.
18. H. MARGENAU, *Philos. Sci.,* 25, 1958, 23.
19. W. HEISENBERG, *Physics and Philosophy,* Nueva York, Harper Torchbooks, 1962 [vers. cast. cit.].
20. JEAN-PAUL SARTRE, *L'Être et le Néant,* París, 1943 [vers. cast.: *El ser y la nada,* Buenos Aires, Losada, 1950].
21. L. ROSENFELD, *Science Progress,* 163, 1953, 393.
22. C. CAUDWELL, *The Chrisis in Physics,* Londres, Bodley Head, 1939.
23. L. ROSENFELD, *Physics Today,* octubre de 1963.
24. F. DYSON, *Scient. Amer.,* septiembre de 1958.
25. W. YOURGRAU, «On the Reality of Elementary Particles», en *The Critical Approach to Science and Philosophy,* Nueva York, Macmillan, 1964.

INDICE ALFABETICO

(Las referencias principales están en cursiva.)

Adler, A., 143.
Agassi, J., 123.
Alquitaramiento del lenguaje, 109, 144, 149.
Angulo de fase, 88, 115.
Antisimetría, 92-3.
A priori, 35, 38.
Aquiles, 94.
Argumento de la inversión, 79.
— de la recurrencia, 79.
— de Zermelo, 79.
Aristóteles, 129, 143.

Baile entre huevos, 122.
Black, M., 36, *161.*
Bohm, D., 91, 116, 137, 140.
Bohr, N., 18, 19, 22, 29, 31, 42-3, 54, 62, 64, 106, 109, 115, 120, 121, 123, 128, 142, 148, *161, 162, 163.*
Boltzmann, L., 67, 79.
Bopp, F., 102, *162.*
Born, M., 22, 27, 29, 100, 109, 112, 113, 114, 144, *162.*
Bradley, R. D., 35, 37, 126, *161, 163.*
Bridgman, P., 39, 43, 82, *161, 162.*
Broglie, L. de, 19, 22, 25, 44, 91, 116, 128, 137, *161.*
Brown, R., 115.
Bunge, M., 37, 131, *161, 163.*

Caudwell, C., 144, *163.*
Causalidad, 33 sigs.
Coherencia, 22, 24, 106.
Coincidencias, 125.
Complementaridad, 64, 141 sigs.
Conciencia, 129, 132, 133-5.
Conformidad de las estadísticas, 38.
Conjugación, 97-8.
Copérnico, N., 116, 117.
Correspondencia, 54.

Demonio, 40-1, 52.
Desorden molecular, 40, 43-4.
Destino del hombre, 121.
Determinismo, 33 sigs.
— endurecido, 40.
Determinismo suavizado, 40-1.
Dialéctica, 28, 129, 149.
— hegeliana, 129.
Difracción, 15 sigs.
Dirac, P. A., 14, 22, 25, 29, 93, 95, 138.
Dirección del tiempo, 78.
Distribución de Gauss, 51, 139-40.
Duane, W., 16 sigs., 103, 110, 111, 113, 120, 124, 144, *161.*
Dyson, F., 144, *163.*

Ecuaciones de Maxwell, 26, 54.
Eddington, A., 109-10.
Efecto Compton, 98.
— de túnel, 126-7.
— Zeeman, 13.
Ehrenfest, P., 21, 75, 78, 79, 120, 124, *161.*
Einstein, A., 4, 22, 29, 40, 44, 57, 59, 92, 94, 95, 118, 122, 123, *162.*
Epstein, P., 21, 120, 124, *161.*
Equipartición, 67, 74.
Eslabón perdido, 20.
Espín, 53, 70.
— de Goudsmit — Uhlenbeck, 13-4.
Estadística de Bose-Einstein, 92-3, 95.
Estado de un sistema, 49 sigs., 57, 59, 63-4, 65, 69-70, 76-7.
Estados cuánticos, 49-50, 63.
Ewald, P., 104, *162.*
Experimento de Stern y Gerlach, 38, 49, 61, 133.

Factor *g,* 13.
Fatalismo, 34.
Feigl, H., 127.
Fermi, E., 25, 92, 93, 94-5, 138.
Feyerabend, P., 44, 131, *161, 163.*
Fiebres recurrentes, 27.
Filtro, 49 sigs., 68.
Fluctuación, 51, 75.
Fotón, 25, 50, 116, 118, 138.
Freud, S., 143.

Galileo, 20, 97, 99, 117, 147.
Gestalt, 16, 114.
Gravedad (corrimiento hacia el rojo), 123.

Heisenberg, W., 22, 29, 43, 53, 77, 82, 91, 111, 112, 118, 121, 124, 125, 128, 129, 135, 136, 137, 138, 143, 148, 149, *161, 162, 163.*
Heitler, W., 25, 118, 138, *162.*
Hinshaw, V., 48, *161.*
Hoffmann, B., 26.
Hook, S., 19, *161.*

Igualdad parcial, 50, 70, 72, 73-4.
Incompatibilidad, 61, 127, 141-2.
Indeterminación, 119 sigs.
Información, 75-7.
Interferencia, 14 sigs., 81, 86, 151 sigs.
Inversión para Lohschmid, 79.

James, W., 111.
Jeans, J., 29, 112-3, 139, *161, 162.*
Johnson, Dr., 27, 110.
Jordan, P., 91, 116, 117, *162.*
Juego de las bolas y la navaja, 36-8, 47-8.

Kant, I., 33 sigs.
Kennedy, 29.
Klein, O., 93, 116.

Laue, M., 17.
Leibniz, G. W., 47, 48, *161.*
Lennard-Jones, J., 92, *162.*
Ley de reflexión, 15, 18, 24-5.
— de Bragg, 15, 17, 103.
— de Snell, 25.
Libre albedrío, 36.
Lógica cuántica, 27, 28, 118, 121, 148.
London, F., 142.

Mach, E., 33.
Mao Tse Tung, 137.
Margenau, H., 65, 126, 131, 134, 145, 146, *163.*
Matriz estocástica, 60-1, 146-7.
Maxwell, G., 127.
Medición, 64, 120, 121-2, 125, 135 sigs., 148.
Mehlberg, H., 127.
Mendel, G., 20.
Método de Franck y Hertz, 123.
Momento lineal, 17 sigs.
Multiplicidad, 63-4.
Mundo laplaciano, 33-4, 35, 39, 112.

Neodualismo, 116.
Neumann, J. von, 44, 51, 74, 138, 145, *161, 162.*
Newman, J. R., 129.
Newton, Sir I., 19, 25, 97.
Northrup, F. C. S., 121.

Observable, 57, 61, 62.
— según Occam, 119.
Observaciones, 78.
Ondas luminosas, 25, 118.
Ondícula, 24, 30, 115, 127.
Oppenheimer, R., 125, *163.*
Ortogonalidad, 50, 62.
Oscilador de campo, 118.

Paquete de ondas, 127 sigs., 135 sigs.
Paradoja de Gibbs, 68 sigs.
— de Zenón, 122.
Parámetros ocultos, 140.
Parte que pase, 50 sigs.
Partículas idénticas, 72, 92-3.
Pauli, W., 22, 26, 92, 93, *162.*
Peirce, C., 44, *161.*
Perturbación, 60, 93.
Planck, M., 13, 17, 30, 54, 60, 68, 77, 106, 110, 113, 144, 147.
Pluralidad, 118.
Poincaré, recurrencia según —, 79.
Popper, K., 41, 43, 44, 45, 117, 120, 126, 131, 143, *161, 163.*
Potencia aristotélica, 129.
Predecibilidad, 36 sigs.
Principio de continuidad, 47 sigs.
— de exclusión, 26.
— de Huygens, 15, 25.
Prisma de Nicol, 50, 52.
Probabilidad de transición, 52, 57, 89, 156.
Ptolomeo, 116.

Realidad, 27, 110, 114, 117, 122, 129, 148.
Regla de conmutación, 100.
Reglas cuánticas, 17-8, 106, 148.
Regresión infinita, 42.
Reichenbach, H., 17, 54, 134, *161, 163.*
Reproducibilidad, 51, 65, 134.
Resonancia, 22.
Retícula recíproca, 104.
Reversibilidad, 50, 52, 146.
Rip Van Winkle, 113.
Rosenfeld, L., 77, 123, 143, *162, 163.*
Rutherford, E., 117, 148.

Salto cuántico, 22, 51, 139.
Salto de gatos, 90.
Sartre, J. P., 142, *163.*

Saurios, 139.
Schrödinger, E., 18, 22, 28, 29, 54, 67, 77, 97, 111, 112, 119, 135, 136, 138, *161*, *162*.
Segunda cuantización, 116, 117, 148.
Separador, 50, 61, 64.
Simetría bilateral, 50, 57, 59, 146.
— del azar, 38.
Sirio, 26.
Sistema de Tycho Brahe, 116.
Sommerfeld, A., 18, 30, 114.
Stopes-Roe, H. V., 25.

Tablero de Galton, 139.
Telepatía, 134.
Tensor, 90-1, 100, 155-6.
Teorema de Nernst, 92, 93.
Teoría de la radiación, 25, 118.
Thomas, L. H., 159, 160.
Transformación ortogonal, 85.
— unitaria, 85-6, 87, 135, 153.
Transitividad, 82-3, 84, 85, 147.

Unicidad, demostración de —, 84, 151-3.

Valor medio, 89.
Velocidad supralumínica, 129, 136.
Vigier, J. P., 116.

Weizsäcker, C. F. von, 28, 111, 113, 130, 132, *161*, *162*.
Wigner, E., 116, 133.
Wittgenstein, L., 130.

Yourgrau, W., 115, 149, *163*.

OTRAS OBRAS DE EDITORIAL TECNOS

FILOSOFIA

Abellán: *Miguel de Unamuno a la luz de la psicología.*

Abellán: *Ortega y Gasset en la filosofía española.*

Díaz, Elías: *Revisión de Unamuno. Análisis crítico de su pensamiento político.*

Gurméndez: *Ser para no ser* (ensayo de una dialéctica subjetiva).

Nicol: *Historicismo y existencialismo.*

Nicol: *El problema de la filosofía hispánica.*

Sotelo: *Sartre y la razón dialéctica.*

Sánchez de la Torre: *Los griegos y el Derecho natural.*

Tierno Galván: *Acotaciones a la historia de la cultura occidental en la Edad Moderna.*

Enjuto: *La filosofía de Alfred North Whitehead.*

Fernández de Castillejo: *Actualidad y participación.*

FILOLOGIA Y LITERATURA

Pérez-Rioja: *Diccionario de símbolos y mitos* (Las ciencias y las artes en su expresión figurada).

Pérez - Rioja: *Gramática de la Lengua Española* (6.ª ed., 1.ª reimpresión).

Romero: *Paisaje y literatura de España* (Antología de los escritores del 98).

Bonilla: *Historia y psicología del perro.*